

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $|f(x)| \leq \max(|x|, |x^3|) \leq |x|, \forall x \in [-1, 1].$

**b)** Din  $|f(x)| \leq |x|, \forall x \in [-1, 1]$  rezultă  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Cum  $f(0) = 0$ , rezultă că  $f$  este continuă în origine.

**c)** Fie  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, x \neq 0$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{2}n^3} = 0$ , deci  $f$  nu este derivabilă în 0.

**2.a)**  $f$  trebuie să fie derivabilă, deci continuă. Din continuitatea lui  $f$  rezultă  $b = 0$ .

Apoi  $f'(x) = ae^x + axe^x - 1, \forall x < 0$  și  $f'(x) = \cos x - x \sin x, \forall x > 0$ .

Cu o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă  $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$ .

**b)**  $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^{\pi} x \cos x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + x \sin x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{3}{2}.$

**c)** Avem  $I_n = \int_0^{\pi} x^{n+1} \cos x dx = x^{n+1} \sin x \Big|_0^{\pi} - (n+1) \int_0^{\pi} x^n \sin x dx = -(n+1) \int_0^{\pi} x^n \sin x dx$  și

$$\int_0^{\pi} x^n \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n \sin x dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n \sin x dx = 1, \text{ deci } I_n \leq -(n+1), \text{ de unde concluzia.}$$