Soluție

1.a) $\left|f(x)\right| \le \max\left(|x|,\left|x^3\right|\right) \le |x|,\ \forall x\in[-1,1]$.

b) Din $\left|f(x)\right| \le |x|,\ \forall x\in[-1,1]$ rezultă $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Cum $f(0)=0$, rezultă că f este continuă în origine.

c) Fie $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0},\ x\neq 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{2}n^3}=0$, deci f nu este derivabilă în 0.

2.a) f trebuie să fie derivabilă, deci continuă. Din continuitatea lui f rezultă $b=0$.

Apoi $f'(x)=ae^x+axe^x-1, \forall x<0$ și $f'(x)=\cos x - x\sin x, \forall x>0$.

Cu o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow a-1=1\Rightarrow a=2$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=-\int_{-1}^{0} xdx+\int_{0}^{\pi} x\cos xdx=-\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+x\sin x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-\dfrac{3}{2}$.

c) Avem $I_n=\int_0^{\pi} x^{n+1}\cos xdx=x^{n+1}\sin x\Big|_0^{\pi}-(n+1)\int_0^{\pi} x^n\sin xdx=-(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin xdx$ și

$\int_0^{\pi} x^n\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n\sin xdx\ge\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n\sin xdx=1$, deci $I_n\le-(n+1)$, de unde concluzia.