

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f(x) = \ln \frac{x+2}{x} = \ln|x+2| - \ln|x|$, $f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{4x+4}{x^2(x+2)^2} < 0$, $\forall x \in (-\infty, -2)$.

b) $a_n = \ln \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n+2}{n} \right) - \ln \frac{n(n+1)}{2} = \ln \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \ln \frac{n(n+1)}{2} = \ln \frac{n+2}{n}$.

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+2}{n} = 0$.

c) Considerăm funcția $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (x-1)f(x)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției h :

există $c \in (0, 1)$ astfel încât $h'(c) = \frac{h(2) - h(1)}{1}$, de unde $f(c) + (c-1)f'(c) = f(2)$.

2.a) $\int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \arctg(x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

b) Se observă că $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei rezultă

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx \leq \int_0^1 1 dx, \text{ de unde } \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1.$$

c) $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' dt = \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{f'(0)}{f(0)} = -2$, deoarece $f'(x) = -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$.