Soluție

1.a) Funcția *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și *f* este continuă rezultă $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, prin urmare *f* este surjectivă.

b) Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x) = x + e^x - (2x+1) = e^x - x - 1$. $h'(x) = e^x - 1$, iar din tabelul de variație rezultă concluzia.

x	$-\infty$ 0 ∞
$h'(x)$	$- - - - - - - - - - - - -\ 0\ + + + + + + + + + + + + + + +$
$h(x)$	∞ $\searrow$ 0 $\nearrow$ ∞

c) Fie funcția $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ 0\,\theta(x) = x + e^x - (mx+1)$. Atunci $\theta(x) \ge \theta(0), \forall x\in\mathbb{R}$, adică 0 este punct de minim a lui θ. Conform teoremei lui Fermat, $\theta'(0) = 0$. Deoarece $\theta'(x) = 1 + e^x - m$ rezultă $\theta'(0) = 2 - m = 0$, de unde $m = 2$.

2.a) Deoarece *F* este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției *f*, atunci $F'(x) = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $\left(4F(x)\right)' = 4f(x) = 4\sin^3 x\cos x$. Apoi $\left(\sin^4 x\right)' = 4\sin^3 x\cos x$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x) = \sin^4 x + c$. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x) = \dfrac{1}{4}\sin^4 x.$ Cum $G'(x) = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, există $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = G(x) + d$, iar pentru $c = 4d$, rezultă concluzia.

b) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \dfrac{1}{4}\sin^4 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{4}.$

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $x = \pi - t$ și obținem
$I = \int_0^{\pi} \sin^{6n+3} x\cos^{2n+1} x dx = \int_{\pi}^{0} \sin^{6n+3}(\pi - t)\cos^{2n+1}(\pi - t)(-1)dt = \int_0^{\pi} \sin^{6n+3} t(-\cos t)^{2n+1} dt = -I$, de unde $I = 0$.