Soluție

1.a) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ și $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)=-1$.

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+1\right)=1$.

Prin urmare, ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y=-x+1$.

c) Pentru $x\in(0,1]$ avem $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\in[0,1]$. Pentru $x\in[1,\infty)$ avem $-x\le 1-x^2\le 1$, deci $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$, de unde $-1\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le 1$, $\forall x\ge 1$. Astfel $-1\le g(x)\le 1, \forall x\in(0,\infty)$

2.a) $\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{t^2+t+1}dt=\ln\left(t^2+t+1\right)\Big|_0^{3/4}=\ln\dfrac{37}{16}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $g(x)=t\Leftrightarrow x=f(t)$.

Rezultă $\int\limits_1^3 g(x)dx=\int\limits_0^1 tf'(t)dt=tf(t)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)dt=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)dx=3-\int\limits_0^1 f(x)dx$, de unde concluzia.

c) Folosind **b)** avem $\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^{\alpha} g(x)dx=3-\int\limits_1^3 g(x)dx+\int\limits_1^{\alpha} g(x)dx=3-\int\limits_{\alpha}^3 g(x)dx$, așa încât inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\int\limits_{\alpha}^3 g(x)dx\le 3-\alpha$. Deoarece $g:[1,3]\to[0,1]$ rezultă $g(x)\le 1,\forall\alpha\in[\alpha,3]$ din care prin integrare rezultă $\int\limits_{\alpha}^3 g(x)dx\le 3-\alpha$.