

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Într-adevăr, u este o funcție de două ori derivabilă, $u'(x) = e^x (\sin x + \cos x)$, deci $u'(0) = 1$ și $f(0) = 0$.

b) Avem $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = \left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \right]^x$ și $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Apoi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} \cdot \left(\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}} + \frac{x f^{n-2}(x)}{x^{n-1}} + \frac{x^{n-2} f(x)}{x^{n-1}} + \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}} \right)$, iar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f''(0)}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^k(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)^k = (f'(0))^k = 1, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

2. a) $g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x)$.

b) $\int_0^1 f^2(x) g(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2} dx = -\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} \right)' \ln(1+x) dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1 - \ln 2}{2}$.

c) Pentru $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ cu teorema de medie $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) f(c_k)$, cu $c_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$.

Apoi, deoarece f este descrescătoare, $f(c_k) \geq f\left(\frac{k}{n}\right)$. Rezultă $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.