Soluție

1. a) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{2}{2x+3} = \dfrac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}$.

b) Deoarece $f'(x) > 0$ rezultă că funcția *f* este strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, rezultă $f(x) < 0, \forall x \in (0,\infty)$.

c) $x_{n+1} - x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(n+1+\dfrac{1}{2}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\right) = f(n) < 0.$

2. a) Utilizăm schimbarea de variabilă $t = -u$. Rezultă $f(-x) = \int\limits_0^{-x} e^{t^2}dt = -\int\limits_0^{x} e^{u^2}du = -\int\limits_0^{x} e^{t^2}dt = -f(x)$.

b) Concluzia rezultă din $f(x) = \int\limits_0^1 e^{t^2}dt + \int\limits_1^x e^{t^2}dt > \int\limits_1^x e^{t^2}dt > \int\limits_1^x e^{t}dt = e^x - e$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - e\right) = \infty$.

c) $e^{t^2} \le e^t, \forall t \in [0,1]$.

Rezultă $\int_0^x e^{t^2}dt \le \int_0^x e^t dt, \forall x \in [0,1]$, deci $f(x) \le e^x - 1, \forall x \in [0,1]$.

Prin urmare $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 \left(e^x - 1\right)dx = e - 2$.