

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}.$

b) Deoarece $f'(x) > 0$ rezultă că funcția f este strict crescătoare. Cum $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, rezultă $f(x) < 0, \forall x \in (0, \infty).$

c) $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln\left(n+1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = f(n) < 0.$

2. a) Utilizăm schimbarea de variabilă $t = -u$. Rezultă $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt = -f(x).$

b) Concluzia rezultă din $f(x) = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt > \int_1^x e^{t^2} dt > \int_1^x e^t dt = e^x - e$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e) = \infty.$

c) $e^{t^2} \leq e^t, \forall t \in [0, 1].$

Rezultă $\int_0^x e^{t^2} dt \leq \int_0^x e^t dt, \forall x \in [0, 1],$ deci $f(x) \leq e^x - 1, \forall x \in [0, 1].$

Prin urmare $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2.$