Soluție

1. a) $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}}=-\infty$, deci f nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[k,k+1]$ și derivabilă pe intervalul $(k,k+1)$, aplicăm teorema lui Lagrange . Rezultă existența unui punct $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) $a_{n+1}-a_n=-f(n+1)+f(n)+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$ cu $c_n\in(n,n+1)$, deci $a_{n+1}-a_n<0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1-(x+1)\ln(x+1)\Big|_0^1+x\Big|_0^1=-\dfrac{7}{12}-2\ln 2.$.

b) Cum $F(0)=0$, aplicăm regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{5x^4}$. Dar

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{20x^3(1+x)}=\dfrac{1}{20}$.

c) $f'(x)=1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^3}{1+x}$**.** Cum, pe $(-1,0)$ derivata f' este negativă, iar pe $(0,\infty)$ este pozitivă, rezultă că 0 este punct de minim absolut, deci $f(x)\geq f(0)=0$.

Rezultă $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)$, din care se obține $\int_0^1\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)dx\geq\int_0^1\ln(1+x)dx$

Dar $\int_0^1\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)dx=\dfrac{5}{12}$, deci $\int_0^1\ln(1+x)dx\leq\dfrac{5}{12}$.