Soluție

1. a) Prin inducție demonstrăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) = 2^{n+1}e^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$.Într-adevăr $f_1(x) = f_0'(x) = 2e^{2x}$ .Presupunem că $f_n(x) = 2^n e^{2x}$ și rezultă că $f_{n+1}(x) = 2^{n+1}e^{2x}$. Pentru $n = 3$ rezultă $f_3(x) = 8e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^n e^{2x} = 0$ rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală spre $-\infty$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2^n e^{2x} = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^n e^{2x}}{x} = \infty$ rezultă că f_n nu are alte asimptote.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a)}{f_{n+1}(a)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2e^{2a} + 2^2 e^{2a} + ... + 2^n e^{2a}}{2^{n+1}e^{2a}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n} = 1$.

2. a) Funcția f este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ deoarece pe acest interval f este produs de funcții continue. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} x\ln^2 x = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$, f este continuă în 0. Rezultă f continuă pe $[0,\infty)$ și prin urmare este integrabilă pe $[0,1]$.

b) Deoarece funcția $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_t^1 f(x)dx$ este continuă, avem $\int_0^1 f(x)dx = F(0) = \lim\limits_{t\searrow 0} F(t)$. Cum

$$\int_t^1 x\ln^2 x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_t^1 = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{2}\ln^2 t + \frac{1}{4} - \frac{t^2}{4},$$ rezultă că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$.

c) $\int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 \frac{1}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x}(-\ln x)^2 dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 x dx = \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e = \frac{1}{3}$.