

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$

**b)** Deoarece  $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$  rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .

Din  $x > 0$  și  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ , rezultă  $f(x) > f(0) = 0$ .

**c)**  $f(x) = \ln e^x - \ln(1+x) = \ln \frac{e^x}{1+x}$ . Deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**2.a)**  $F(x) = \int_1^2 t^x dt = \frac{t^{x+1}}{x+1} \Big|_1^2 = \frac{2^{x+1} - 1}{x+1}$ , pentru  $x \neq -1$ , deci  $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ; pentru  $x = -1$

relația se verifică direct.

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^{x+1} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2^{x+1} \ln 2 = \ln 2$ .

**c)** Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue, rezultă că  $F$  este primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 1$  (condiție care este îndeplinită). Deci  $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1, \infty)$ .

Rezultă  $f(x) = \left( \frac{2^{x+1} - 1}{x+1} \right)' = \frac{(x \ln 2 + \ln 2 - 1)2^{x+1} + 1}{(x+1)^2}.$