

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = mx + n$, unde:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 1} = 0.$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)' \cdot (x + 1) - (x^2 + x + 1) \cdot (x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}.$$

c) Cum $f''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3} < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$ funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

$$\text{2. a) } \int_0^\pi f_2(x) dx = \int_0^\pi |\sin 2x| dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^\pi \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2x}{2} \Big|_{\pi/2}^\pi = 2.$$

$$\text{b) } \text{Cum } \frac{|\sin(nx)|}{x} \leq \frac{1}{x}, \forall x \in [\pi, 2\pi], \text{ rezultă } I_n = \int_\pi^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x} dx \leq \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln 2.$$

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $nx = t$ și obținem

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{nt} ndt = \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$