Soluție

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y = mx + n$, unde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

b) $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+x+1\right)' \cdot (x+1) - \left(x^2+x+1\right)\cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) Cum $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} < 0, \quad \forall x \in (-\infty, -1)$ funcția *f* este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

2. a) $\int_0^{\pi} f_2(x)\,dx = \int_0^{\pi} |\sin 2x|\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x\,dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2$.

b) Cum $\dfrac{|\sin(nx)|}{x} \le \dfrac{1}{x}, \forall x \in [\pi, 2\pi]$, rezultă $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x}dx \le \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x}dx = \ln 2.$

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $nx = t$ și obținem

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{nt} n\,dt = \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \ge \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$