Soluție

1.a) $\left(f(x)\right)^x=\left(1+\dfrac{x+a+1}{x^2-1}\right)^x=\left[\left(1+\dfrac{x+a+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x+a+1}}\right]^{\frac{x^2+(a+1)x}{x^2-1}}$, deci limita este *e*.

b) Avem $f'(x)=-\dfrac{x^2+2(a+1)x+1}{\left(x^2-1\right)^2}$, $x\neq\pm1$. Dacă $x_0=3$ este punctul de extrem local și *f* este derivabilă în 3, atunci $f'(3)=0$, deci $a=-\dfrac{8}{3}$. Pentru $a=-\dfrac{8}{3}$, din semnul lui f' rezultă că $x_0=3$ este punct de extrem.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+a$. Dacă $g(1)\neq0$, $g(-1)\neq0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ atunci *f* are două asimptote verticale, $x=1$ și $x=-1$. Dacă $a=0$ atunci $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x\neq\pm1$, iar dacă $a=-2$, atunci $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, $x\neq\pm1$ și în ambele cazuri *f* are o singură asimptotă verticală.

2. a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,dt=\int_0^x 1dt=x$, iar $f_2(x)==\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x tdt=\dfrac{x^2}{2}$.

b) Se demonstrează prin inducție că $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$. Prin urmare :

$\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=\dfrac{(n+1)x^{n+1}+(n+1)!}{x^{n+1}+2(n+1)!}$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=n+1$.

c) $V=\pi\int_0^\pi x^2\sin^2 xdx\ \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos2x)dx=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2\sin2x}{2}-\dfrac{x\cos2x}{2}+\dfrac{\sin2x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi=\dfrac{\pi^4}{6}-\dfrac{\pi^2}{4}$.