

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece $\lim_{x \searrow -2} f(x) = \lim_{x \searrow -2} \ln \frac{2+x}{2-x} = -\infty$ și $\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \nearrow 2} \ln \frac{2+x}{2-x} = \infty$, rezultă asimptotele verticale $x = -2$ și $x = 2$; alte asimptote nu există.

b) Deoarece $f'(x) = \frac{2-x}{2+x} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)' = \frac{4}{4-x^2} > 0, \forall x \in (-2, 2)$, deci f este strict crescătoare pe $(-2, 2)$.

c) Notăm $\frac{1}{x} = y$. Atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} f(y) = f'(0) = 1$.

2.a) $f(t) = t^2 \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 e^{2x} dx = At^2 - 2Bt + C$, unde $C = \int_1^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_1^2 = \frac{e^4 - e^2}{2}$.

b) Deoarece $A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}$, rezultă $f(t) = \frac{1}{2}t(4B - t) + C$, de unde $f(2B + t) = f(2B - t) = \frac{1}{2}(4B^2 - t^2) + C$.

c) Deoarece $f(t) = At^2 - 2Bt + C \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $4B^2 - 4AC \leq 0$,

adică $B^2 \leq AC$ din care rezultă $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 \leq \left(\int_1^2 e^{2x} dx \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \right)$.