Soluție

1.a) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$.

Dacă $x<0$ rezultă $1+x<1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}<1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}<\alpha$ și în final $f'(x)<0$.

Dacă $x>0$ rezultă $1+x>1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}>1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}>\alpha$ și în final $f'(x)>0$.

Rezultă *f* strict descrescătoare pe $(-1,0]$ și strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0]$, deci $x<0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, deci $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

Așadar $f(x)>1,\forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$, de unde rezultă cea ce trebuia demonstrat.

c) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1}>0,\forall x\in(-1,\infty)$. Rezultă *f* convexă pe $[0,\infty)$ .Prin urmare $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2},\forall a,b\in[0,\infty)$. Pentru $a=2x$ și $b=2y$ rezultă inegalitatea din enunț.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $\int_1^3 f^2(x)[x]dx=\int_1^2 f^2(x)dx+2\int_2^3 f^2(x)dx=\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_1^2+2\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_2^3=$.

$=\frac{16}{3}-6\ln 2+2\ln 3$.

c) $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx$, iar $\int_n^{n+1}f(x)dx=(n+1-n)f(c_n)=f(c_n)$, cu $c_n\in(n,n+1)$, deci $a_{n+1}-a_n>0$ deoarece *f* este strict descrescătoare. Apoi, din $\int_1^{k+1}f(x)dx=f(c_k)$, cu $c_k\in(k,k+1)$.

$\int_0^n f(x)dx=\sum_{k=o}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\sum_{k=o}^{n-1}f(c_k)>f(0)+f(1)+...+f(n-1)$, de unde $a_n<f(n)-f(0)<1$, deci șirul este mărginit.