

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \infty.$

b) Funcția este strict crescătoare, este continuă și $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0, f(1) = 1 > 0.$

c) Folosind regula lui l'Hôpital pentru cazul $\frac{0}{0}$ avem $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x+1)e^x = (x_0+1)e^{x_0}$, din $f(x_0) = 0$

rezultă că $x_0 = -\ln x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$, deci $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ și $l = (x_0+1)\frac{1}{x_0} = 1 + \frac{1}{x_0} = f'(x_0).$

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \ln(x+1) dx = \frac{1}{2} \ln^2(x+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln^2 2.$

b) Deoarece $x \in (0,1) \Rightarrow x^n > x^{n+1}$ și $\frac{1}{x+1} > 0$, avem $\frac{\ln(1+x^n)}{x+1} > \frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x+1}, \forall x \in (0,1)$ de unde concluzia.

c) Avem $I_n \geq 0$ și $I_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$; concluzia rezultă din teorema cleștelui.