Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\infty$ **.**

b) Funcția este strict crescătoare, este continuă şi $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-1<0,\ f(1)=1>0$.

c) Folosind regula lui l'Hôspital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$ avem $l=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xe^x-1}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)e^x=(x_0+1)e^{x_0}$, din $f(x_0)=0$ rezultă că $x_0=-\ln x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$, deci $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ şi $l=(x_0+1)\dfrac{1}{x_0}=1+\dfrac{1}{x_0}=f'(x_0)$.

2.a) $I_1=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}\ln(x+1)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln^2 2.$

b) Deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$ şi $\dfrac{1}{x+1}>0$, avem $\dfrac{\ln\left(1+x^n\right)}{x+1}>\dfrac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x+1}$, $\forall x\in(0,1)$ de unde concluzia.

c) Avem $I_n\ge 0$ şi $I_n\le\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx\le\int\limits_0^1 x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}$; concluzia rezultă din teorema cleştelui.