Soluție

1. a) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ dacă $x\neq 0$ şi $f(0)=a$; $f(1)=e-1$, $f'(1)=1$, deci $y=x+e-2$ este ecuația tangentei.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, deci f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f(0)=a=1$.

c) Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}=f'(0)$.

2.a) $I_1=\int_1^2(x-1)(2-x)dx=\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{6}$.

b) $I_n=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2(2x-3)'\left(-x^2+3x-2\right)^n dx=\dfrac{1}{2}(2x-3)\left(-x^2+3x-2\right)^n\Big|_1^2+\dfrac{n}{2}\int\limits_1^2(2x-3)^2\left(-x^2+3x-2\right)^{n-1}dx=$

$=2n\int\limits_1^2\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)\left(-x^2+3x-2\right)^{n-1}dx=2n\left(\dfrac{1}{4}I_{n-1}-I_n\right)$, de unde concluzia cerută.

c) $0\leq(x-1)(2-x)\leq\dfrac{1}{4},\ \forall x\in[1;2]$, de unde $0\leq I_n\leq\int_1^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{1}{4^n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.