

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ dacă $x \neq 0$ și $f(0) = a$; $f(1) = e - 1$, $f'(1) = 1$, deci $y = x + e - 2$ este ecuația tangentei.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, deci f este continuă în $x = 0$ dacă și numai dacă $f(0) = a = 1$.

c) Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} = f'(0)$.

2.a) $I_1 = \int_1^2 (x-1)(2-x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \frac{1}{6}$.

b) $I_n = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-3)' (-x^2 + 3x - 2)^n dx = \frac{1}{2} (2x-3) (-x^2 + 3x - 2)^n \Big|_1^2 + \frac{n}{2} \int_1^2 (2x-3)^2 (-x^2 + 3x - 2)^{n-1} dx =$
 $= 2n \int_1^2 \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) (-x^2 + 3x - 2)^{n-1} dx = 2n \left(\frac{1}{4} I_{n-1} - I_n \right)$, de unde concluzia cerută.

c) $0 \leq (x-1)(2-x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in [1;2]$, de unde $0 \leq I_n \leq \int_1^2 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{1}{4^n}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.