Soluție

1.a) $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$, deci $y = x$ asimptota oblică spre ∞.

b) Punctele de extrem sunt aceleaşi cu ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 3x + 2.$ Deoarece $g'(x) = 3(x^2 - 1)$, punctele de extrem sunt ± 1.

c) Folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to\infty} \frac{2\mathrm{arctg} f(x) - \pi}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1+f^2(x)} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{2\left(2+tg^2\frac{x}{2}\right)}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$.

b) Dacă F este o primitivă, atunci $F'(x) = \frac{1}{3+\cos x}$. Cum $\cos x \in [-1;1], F'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$ deci F este strict crescătoare.

c) Avem $\frac{1}{4} \le f(x) \le \frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$, de unde $\frac{x}{4} < \int_0^x f(t)dt \le \frac{x}{2},\ \forall x > 0.$

Rezultă $\frac{1}{4x} < \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2x},\ \forall x > 0$, deci limita este egală cu 0.