

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$, deci $y = x$ asimptota oblică spre ∞ .

b) Punctele de extrem sunt aceleași cu ale funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x + 2$. Deoarece $g'(x) = 3(x^2 - 1)$, punctele de extrem sunt ± 1 .

c) Folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \arctg f(x) - \pi}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1 + f^2(x)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+2)^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$.

$$\text{2.a)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 \frac{x}{2}}{2 \left(2 + tg^2 \frac{x}{2} \right)} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

b) Dacă F este o primitivă, atunci $F'(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$. Cum $\cos x \in [-1; 1]$, $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare.

c) Avem $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $\frac{x}{4} < \int_0^x f(t) dt \leq \frac{x}{2}$, $\forall x > 0$.

Rezultă $\frac{1}{4x} < \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2x}$, $\forall x > 0$, deci limita este egală cu 0.