Soluție

1.a) $f'(x) = 3e^{3x} + 2,\ f(0) = 2,\ f'(0) = 5$, deci ecuația cerută este $y - 2 = 5x$.

b) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescãtoare $\Rightarrow f$ injectivã. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty,\ f$ continuã $\Rightarrow f$ surjectivã.

Deci f este bijectivã $\Rightarrow f$ inversabilã.

c) Suma este egală cu $e^{-3} + e^{-6} + ... + e^{-3n} = e^{-3}\dfrac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}}$ și are limita $\dfrac{1}{e^3 - 1}$.

2.a) $a_1 = \int\limits_0^1 \sin \pi x dx = -\dfrac{1}{\pi}\cos \pi x \Big|_0^1 = \dfrac{2}{\pi}$.

b) Arătăm inductiv că $0 \le a_{n+1} \le a_n, \forall n \ge 0$. Cum $0 \le a_1 = \dfrac{2}{\pi} \le 1 = a_0$, presupunând că $0 \le a_n \le a_{n-1} \le ... \le a_0 = 1$

rezultă $0 \le \sin \pi x \le 1,\ \forall x \in [0, a_n]$, deci $0 \le a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \sin \pi x dx \le \int\limits_0^{a_n} dx = a_n$. Deci $(a_n)_n$ este monoton și mărginit.

c) Dacă $(a_n)_{n\ge 0}$ convergent către $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci obținem, prin trecere la limită, $x = \int_0^x \sin \pi t dt$.

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \int_0^x \sin \pi t dt$. Avem $g(0) = 0$ și $g'(x) = 1 - \sin \pi x \ge 0 \Rightarrow x = 0$ este soluție unică.