

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = 3e^{3x} + 2$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 5$, deci ecuația cerută este $y - 2 = 5x$.

b) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, f continuă $\Rightarrow f$ surjectivă.

Deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă.

c) Suma este egală cu $e^{-3} + e^{-6} + \dots + e^{-3n} = e^{-3} \frac{1 - e^{-3n}}{1 - e^{-3}}$ și are limita $\frac{1}{e^3 - 1}$.

2.a) $a_1 = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

b) Arătăm inductiv că $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \geq 0$. Cum $0 \leq a_1 = \frac{2}{\pi} \leq 1 = a_0$, presupunând că $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_0 = 1$

rezultă $0 \leq \sin \pi x \leq 1$, $\forall x \in [0, a_n]$, deci $0 \leq a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin \pi x dx \leq \int_0^{a_n} dx = a_n$. Deci $(a_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit.

c) Dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ convergent către $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, atunci obținem, prin trecere la limită, $x = \int_0^x \sin \pi t dt$.

Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - \int_0^x \sin \pi t dt$. Avem $g(0) = 0$ și $g'(x) = 1 - \sin \pi x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ este soluție unică.