

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

b) Avem $\sqrt{x^2 + 1}f'(x) = x$ și derivând $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}f'(x) + \sqrt{x^2 + 1}f''(x) = 1$, de unde $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

c) $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$, deci $y = -x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1}) dx = (x - \ln(x+1)) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$.

b) $I_n = \int_0^1 x \frac{nx^{n-1}}{x^n + 1} dx = \int_0^1 x \left(\ln(x^n + 1) \right)' dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(x^n + 1) dx$

c) Știm că $\ln(1+t) \leq t$, $\forall t \geq 0$, de unde $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \ln 2$.