Soluție

1.a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b)Avem $\sqrt{x^2+1}f'(x)=x$ și derivând $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'(x)+\sqrt{x^2+1}f''(x)=1$, de unde $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=$ $=\sqrt{x^2+1}$.

c) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$, deci $y=-x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=(x-\ln(x+1))\,|_0^1=1-\ln 2$.

b) $I_n=\int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{x^n+1}dx=\int_0^1 x\left(\ln\left(x^n+1\right)\right)'dx=\ln 2-\int_0^1\ln\left(x^n+1\right)dx$

c) Știm că $\ln(1+t)\le t,\ \forall t\ge 0$, de unde $0\le\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx=0,$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\ln 2$.