Soluție

1.a) $f(1)=0$, $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x^2+x-1}{x^2}$, $f'(1)=\dfrac{1}{e}$, deci ecuația este $y=\dfrac{1}{e}(x-1)$.

b) $f'(x)=0$ are rădăcinile $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Din semnul derivatei rezultă că acestea sunt puncte de extrem local.

c) $m=\lim\dfrac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-e^{-\frac{1}{x}}=-2$, deci $y=x-2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2.a) Cum $f'(x)=x^3\sqrt{x^2+1}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) $f(1)=\int\limits_0^1 t^3\sqrt{t^2+1}dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(u^4-u^2\right)du=\left(\dfrac{u^5}{5}-\dfrac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{5x^4}=\dfrac{1}{5}$, din teorema lui l'Hôspital rezultă că limita cerută este $\dfrac{1}{5}$.