

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f(1) = 0$, $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$, $f'(1) = \frac{1}{e}$, deci ecuația este $y = \frac{1}{e}(x - 1)$.

b) $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Din semnul derivatei rezultă că acestea sunt puncte de extrem local.

c) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) - e^{-\frac{1}{x}} = -2$, deci $y = x - 2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2.a) Cum $f'(x) = x^3 \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) $f(1) = \int_0^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt = \int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2) du = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{15}$.

c) Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{5x^4} = \frac{1}{5}$, din teorema lui l'Hôpital rezultă că limita cerută este $\frac{1}{5}$.