

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $a_1 > a_0$, iar $a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$, deci prin inducție $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.

b) Avem $a_0 < 2$ și $a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} < 2$, deci inductiv $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. Fiind și monoton $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

c) Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 + a_{n+1}} + \sqrt{2 + a_n}} = \frac{1}{4}$.

2.a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 t + t g t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((t g t)' + t g t - 1) dt = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

b) $f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x) \sin x}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict crescătoare.

c) Pentru cazul $\frac{0}{0}$, aplicând regula lui l'Hôpital, limita devine $\lim_{x \searrow 0} \frac{(\sin x + \cos x) \sin x}{2x \cos^2 x} = \frac{1}{2}$.