Soluție

1.a) $a_1 > a_0$, iar $a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$, deci prin inducție $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

b)Avem $a_0 < 2$ şi $a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} < 2$, deci inductiv $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Fiind şi monoton $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + a_{n+1}} + \sqrt{2 + a_n}} = \frac{1}{4}$.

2.a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 t + tgt)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((tgt)' + tgt - 1)dt = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

b) $f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x)\sin x}{\cos^2 x} > 0,\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, deci *f* este strict crescătoare.

c) Pentru cazul $\frac{0}{0}$, aplicând regula lui l'Hôspital, limita devine $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{(\sin x + \cos x)\sin x}{2x\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.