

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a). $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ deci dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptota verticală la graficul funcției.

b) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = 1$, deci $y = x + 1$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

c) Funcția este derivabilă în punctele în care este definită și expresia de sub radical nu se anulează, adică pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. În punctul -1 , derivatele laterale nu sunt finite, deci funcția nu este derivabilă.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx = 2$.

b) Din $F'(x) = f_4(x)$ rezultă $F''(x) = 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) f_4^2(x)$, deci $F''(x) = f_4^2(x) \sin 4x$.

c) Cu schimbarea de variabilă $y = \frac{\pi}{2} - x$,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^3 \left(\frac{\pi}{2} - y \right)}{\frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} (-1) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 y}{\sin y + \cos y} dy = J, \text{ iar}$$

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$