Soluție

1.a). $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ deci dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptota verticală la graficul funcției.

b) $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $n = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = 1$, deci $y = x + 1$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

c) Funcția este derivabilă în punctele în care este definită şi expresia de sub radical nu se anulează, adică pe $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
În punctul -1, derivatele laterale nu sunt finite, deci funcția nu este derivabilă.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\, dx = 2$.

b) Din $F'(x) = f_4(x)$ rezultă $F''(x) = 4\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) f_4^2(x)$, deci $F''(x) = f_4^2(x)\sin 4x$.

c) Cu schimbarea de variabilă $y = \frac{\pi}{2} - x$,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} (-1)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 y}{\sin y + \cos y} dy = J \text{ , iar}$$

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$