

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, deci nu avem asimptotă spre $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(n+1) - f(n) = \frac{e^{c_n}(c_n - 1)}{c_n^2}$, $c_n \in (n, n+1)$. Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(f(n) - f(n+1)) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{c_n} \right)^2 (1 - c_n) e^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - c_n) e^{c_n} = -\infty.$$

2.a) $f(1) = \int_0^1 e^{-t}(t^2 - 3t + 2)dt = \int_0^1 e^{-t}(t-1)(t-2)dt > 0$.

b) $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$. Din tabelul de variație reiese că $x = 1$ este punct de maxim local și $x = 2$ este punct de minim local.

$$\text{c) } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(x^2 - 3x + 2) - e^x(x^2 + 3x + 2)}{2x} = -5$$