Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,1]$ şi strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, deci nu avem asimptotă spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, deci $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(n+1)-f(n)=\dfrac{e^{c_n}(c_n-1)}{c_n{}^2}$, $c_n\in(n,n+1)$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(f(n)-f(n+1))=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{c_n}\right)^2(1-c_n)e^{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-c_n)e^{c_n}=-\infty$.

2.a) $f(1)=\int_0^1 e^{-t}(t^2-3t+2)dt=\int_0^1 e^{-t}(t-1)(t-2)\,dt>0.$

b) $f'(x)=e^{-x}(x^2-3x+2)$. Din tabelul de variație reiese că $x=1$ este punct de maxim local şi $x = 2$ este punct de minim local.

c) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\left(x^2-3x+2\right)-e^{x}\left(x^2+3x+2\right)}{2x}=-5$