

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, $x = 0$ este asimptotă verticală.

b) $f''(x) = \frac{e^x(2x+1)}{x^4}$, deci $x = -0,5$ este punct de inflexiune.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} x^2 \left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{-x^2}{x(x+1)} \frac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{-\frac{1}{x(x+1)}} = -1$.

2.a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + tg^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = tg x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [tg^{2n} x (tg^2 x + 1) - tg^{2n} x] dx = \frac{tg^{2n+1} x}{2n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n$; $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.

c) Cum $0 \leq tg_x^{2n+2} \leq tg_x^{2n}$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, rezultă că $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și mărginit.

Dacă $l = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, atunci din punctul **b)** rezultă concluzia.