Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty,\ x=0$ este asimptota verticală.

b) $f''(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$, deci $x=-0{,}5$ este punct de inflexiune.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}x^2\left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}\dfrac{-x^2}{x(x+1)}\dfrac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1}{-\frac{1}{x(x+1)}}=-1$.

2.a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=tgx\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n+2}\,xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\mathrm{tg}^{2n}\,x(\mathrm{tg}^2\,x+1)-\mathrm{tg}^{2n}\,x\right]dx=\dfrac{\mathrm{tg}^{2n+1}\,x}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n;\ I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

c) Cum $0\le tg_x^{2n+2}\le tg_x^{2n},\ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, rezultă că $0\le I_{n+1}\le I_n$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător şi mărginit.

Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, atunci din punctul **b)** rezultă concluzia.