Soluție

1.a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

b) $x_2=f(x_1)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\in(0,1)$ și, inductiv, $0<x_{n+1}<x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul este descrescător și mărginit.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\frac{1}{\sqrt{1+c_x^2}}\le 1.$

2.a) $\int_1^e \ln x dx = x\ln\Big|_1^e - \int_1^e 1dx = e-(e-1)=1.$

b) Cu schimbarea de variabilă $x=3-t$, $\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1\frac{\ln t}{3-t}(-1)dt=\int_1^2\frac{\ln t}{3-t}dt=\int_1^2 g(x)dx.$

c) Pentru $x\in(0,3)$ avem $\frac{\ln(3-x)}{x}>\frac{\ln 2}{x}$, deci $\int_t^1 g(x)dx>\int_t^1\frac{\ln 2}{x}dx=\ln 2\cdot(-\ln t).$ Concluzia rezultă din $\lim_{t\searrow 0}(-\ln 2\ln t)=\infty$.