

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $x_2 = f(x_1) = \ln(1 + \sqrt{2}) \in (0, 1)$ și, inductiv, $0 < x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este descrescător și mărginit.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = \frac{1}{\sqrt{1 + c_x^2}} \leq 1.$

2.a) $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1.$

b) Cu schimbarea de variabilă $x = 3 - t$, $\int_1^2 f(x) dx = \int_2^1 \frac{\ln t}{3 - t} (-1) dt = \int_1^2 \frac{\ln t}{3 - t} dt = \int_1^2 g(x) dx.$

c) Pentru $x \in (0, 3)$ avem $\frac{\ln(3-x)}{x} > \frac{\ln 2}{x}$, deci $\int_t^1 g(x) dx > \int_t^1 \frac{\ln 2}{x} dx = \ln 2 \cdot (-\ln t).$ Concluzia rezultă

din $\lim_{t \searrow 0} (-\ln 2 \ln t) = \infty.$