

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $f(1) = \frac{\pi}{4}, f'(1) = \frac{1}{2}$ , deci ecuația este  $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1)$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f'(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}$

**c)** Avem  $g'(x) = \arctg x + \frac{x-1}{x^2+1}$ ,  $g''(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2+1)^2}$ . Rezultă că  $g'$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, 1]$  și strict decrescătoare pe  $[1, \infty)$ . Din  $g'(1) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) > 0$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) < 0$ , reiese concluzia cerută.

**2.a)**  $I_1 = \int_0^1 x \sin x = -\cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1$ .

**b)**  $x^n > x^{n+1} \Rightarrow I_n > I_{n+1}$ ;  $\sin x > 0 \Rightarrow I_n > 0$ ;  $(I_n)_{n \geq 1}$  descrescător și mărginit, rezultă  $(I_n)_{n \geq 1}$  convergent.

**c)**  $I_{2n} = \int_0^1 x^{2n} (-\cos x)' dx = -x^{2n} \cos x \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 x^{2n-1} (\sin x)'$   
 $= -\cos 1 + 2nx^{2n-1} \sin x \Big|_0^1 - 2n(2n-1)I_{n-1} = 2n \sin 1 - \cos 1 - 2n(2n-1)I_{2n-2}$ .