Soluție

1.a) $f(1)=\frac{\pi}{4}, f'(1)=\frac{1}{2}$, deci ecuația este $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$

c) Avem $g'(x)=\operatorname{arctg} x+\frac{x-1}{x^2+1}$, $g''(x)=\frac{2(1-x)}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că g' este strict crescătoare pe $(-\infty,1]$ şi strict descrescătoare pe $[1,\infty)$. Din $g'(1)>0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)>0$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)<0$, reiese concluzia cerută.

2.a) $I_1=\int_0^1 x\sin x=-\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x dx=\sin 1-\cos 1$.

b) $x^n>x^{n+1}\Rightarrow I_n>I_{n+1}$; $\sin x>0\Rightarrow I_n>0$; $(I_n)_{n\ge 1}$ descrescător şi mărginit, rezultă $(I_n)_{n\ge 1}$ convergent.

c) $I_{2n}=\int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx=-x^{2n}\cos x\,\Big|_0^1+2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'$

$=-\cos 1+2nx^{2n-1}\sin x\,\Big|_0^1-2n(2n-1)I_{n-1}=2n\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)I_{2n-2}$.