

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $f'_a(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+a}{x(x+1)}.$

**b)**  $f''_a(x) = \frac{x(2a-1)+a}{x^2(x+1)^2}.$   $f$  convexă  $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow 2a-1 \geq 0$  și  $\frac{a}{2a-1} > 0$ , de unde  $a \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right).$

**c)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x+a}} = 1$ , folosind regula lui l'Hôpital.

**2.a)**  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{4}.$

**b)**  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (\sin x)' dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$ , de unde  $n I_n = (n-1) I_{n-2}.$

**c)**  $\cos x \in [0; 1]$  de unde  $I_{n+1} < I_n$ ; în plus  $I_n \geq 0$ , deci șirul este descrescător și mărginit inferior.