Soluție

1.a) $f_a'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+a}{x(x+1)}$.

b) $f_a''(x)=\frac{x(2a-1)+a}{x^2(x+1)^2}$. f convexă $\Leftrightarrow$ $f''(x)\geq 0, \forall x>0$ $\Leftrightarrow$ $2a-1\geq 0$ și $\frac{a}{2a-1}>0$, de unde $a\in\left[\frac{1}{2};\infty\right]$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln x}{\frac{1}{x+a}}=1$, folosind regula lui l'Hôpital.

2.a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{4}$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x(\sin x)'dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 xdx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, de unde $nI_n=(n-1)I_{n-2}$.

c) $\cos x\in[0;1]$ de unde $I_{n+1}<I_n$; în plus $I_n\geq 0$, deci şirul este descrescător şi mărginit inferior.