

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a). $\lim_{x \searrow 0} (x + \ln x) = -\infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, deci nu avem asimptotă orizontală;

$m = 1$ dar n nu este finit, deci nu avem asimptotă oblică.

b) $g_n(x) = x^n + x^{-n}$, $g_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} + n(n+1)x^{-n-2} > 0, \forall x > 0$, deci funcțiile sunt convexe.

c) Din $f_n(1) < 2^n$ și $f_n(2) > 2^n$, rezultă că $x_n \in (1, 2)$, deci $\ln x_n \in (0, 1)$. Deci $\sqrt[n]{2^n - 1} < x_n < 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

2.a) $I_2 = \int_0^a \frac{t^2}{t+1} dt = \int_0^a \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{a^2}{2} - a + \ln(a+1)$

b) $I_n + I_{n-1} = \int_0^a \frac{t^n + t^{n-1}}{t+1} dt = \int_0^a t^{n-1} dt = \frac{t^n}{n} \Big|_0^a = \frac{a^n}{n}$.

c) $\frac{t^n}{t+1} < t^n, \forall t \in [0; a], 0 < I_n < \int_0^a t^n dt = \frac{a^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0, \forall a \in [0; 1]$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.