Soluție

1.a). $\lim\limits_{x \searrow 0}\left(x+\ln x\right)=-\infty$,deci x = 0 este asimptotă verticală; $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$, deci nu avem asimptotă orizontală; m = 1 dar n nu este finit, deci nu avem asimptotă oblică.

b) $g_n\left(x\right)=x^n+x^{-n}$, $g_n''\left(x\right)=n\left(n-1\right)x^{n-2}+n(n+1)x^{-n-2}>0,\forall x>0$, deci funcțiile sunt convexe.

c) Din $f_n\left(1\right)<2^n$ și $f_n\left(2\right)>2^n$, rezultă că $x_n\in\left(1,2\right)$, deci $\ln x_n\in\left(0,1\right)$. Deci $\sqrt[n]{2^n-1}<x_n<2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

2.a) $I_2=\int\limits_0^a\frac{t^2}{t+1}dt=\int\limits_0^a\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt==\frac{a^2}{2}-a+\ln\left(a+1\right)$

b) $I_n+I_{n-1}=\int\limits_0^a\frac{t^n+t^{n-1}}{t+1}dt=\int\limits_0^a t^{n-1}dt=\frac{t^n}{n}\Big|_0^a=\frac{a^n}{n}$.

c) $\frac{t^n}{t+1}<t^n,\forall t\in\left[0;a\right]$, $0<I_n<\int\limits_0^a t^n dt=\frac{a^{n+1}}{n+1}\to 0,\ \forall a\in\left[0;1\right]$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.