

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = m$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 0 = n$, deci $y = 2x$ asimptotă oblică spre ∞ .

b) $f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$, deci f este strict crescătoare, adică injectivă. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și

f continuă, rezultă că f este surjectivă. Deoarece f este bijectivă rezultă că deci f este inversabilă.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}} \cdot e^3 \cdot (e^{2x} + 1)^{-\frac{1}{x}} = e$.

2.a) $F'(x) = e^{\sin^2 x} > 0$, de unde F este strict crescătoare

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2xF(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2xF(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xF'(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xe^{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{2} e^{\sin^2 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-e}{2}$.

c) Conform teoremei l'Hôpital, pentru cazul $\frac{0}{0}$, avem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.