Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2=m$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=0=n$, deci $y=2x$ asimptota oblică spre ∞.

b) $f'(x)=\dfrac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$, deci *f* este strict crescătoare, adică injectivă. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și *f* continuă, rezultă că *f* este surjectivă. Deoarece *f* este bijectivă rezultă că deci *f* este inversabilă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(e^x\right)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}\cdot e^3\cdot\left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{x}}=e.$

2.a) $F'(x)=e^{\sin^2 x}>0$, de unde F este strict crescătoare

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF(x)dx=\frac{1}{2}\sin 2xF(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xF'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1-e}{2}.$

c) Conform teoremei l'Hôpital, pentru cazul $\dfrac{0}{0}$, avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.