

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ,  $f'(e) = \frac{1}{e}$ ,  $f(e) = 0$ , deci ecuația este  $y = \frac{1}{e}(x - e)$ .

**b)**  $f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0, \forall x > 1$ , deci  $f$  este concavă

**c)** Conform teoremei lui Lagrange există  $c_x \in (x, x+1)$  a.i.  $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = \frac{1}{c_x \ln c_x}$ .

Avem de calculat  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{c_x \ln c_x}$ . Cum  $\frac{x \ln x}{(x+1) \ln(x+1)} < \frac{x \ln x}{c_x \ln c_x} < 1$  limita căutată este 1.

**2.a)**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \arctg(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

**b)** Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$ . Atunci  $F'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \geq 0, (\forall) x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , deci  $F$  este strict crescătoare pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**c)** Cu substituția  $x = 2\pi - y$  obținem  $I = \int_0^{2\pi} (2\pi - y)f(y) dy = 2\pi \int_0^{2\pi} f(y) dy - I$ , de unde  $I = 0$ .