Soluție

1.a) $f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $f'(e) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$, deci ecuația este $y = \frac{1}{e}(x-e)$.

b) $f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2} < 0, \forall x > 1$, deci f este concavă

c) Conform teoremei lui Lagrange există $c_x \in (x, x+1)$ *a.i.* $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = \frac{1}{c_x \ln c_x}$.

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{c_x \ln c_x}$. Cum $\frac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)} < \frac{x\ln x}{c_x \ln c_x} < 1$ limita căutată este 1.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \operatorname{arctg}(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \geq 0, (\forall) x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, deci F este strict cresătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Cu substituția $x = 2\pi - y$ obținem $I = \int_0^{2\pi} (2\pi - y) f(y)dy = 2\pi\int_0^{2\pi} f(y)dy - I$, de unde $I = 0$.