Soluție

1.a) $f_t'(x) = 3x^2 + t^2$

b) $f_t'(x) = 3x^2 + t^2 > 0$ pentru orice *x* real, deci funcția este strict crescătoare. $\lim\limits_{x\to\infty} f_t(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty$,

f_t continuă $\Rightarrow$ f_t surjectivă. Cum funcția este strict crescătoare, deci injectivă, înseamnă că ea este inversabilă.

c) Avem $g^3(t) + t^2 g(t) = 1$, unde $1 \geq g(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} \sqrt[3]{1 - t^2 g(t)} = 1 = g(0)$.

2a) $f(1) = \int_0^1 \left(t^2 + 1\right)\sqrt{t}\,dt = \dfrac{20}{21}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^3\sqrt{|x|}}{7} + \dfrac{2x\sqrt{|x|}}{3}$, deci $f(-x) = -f(x)$, adică *f* este impară.

c) Conform teoremei lui Lagrange, există $c_x \in (x, x+1)$ astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = (c_x^2 + 1)\sqrt{c_x}$.

Cum $\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} < \dfrac{(c_x^2+1)\sqrt{c_x}}{x^2\sqrt{x}} < \dfrac{\left((x+1)^2+1\right)\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}$, rezultă că limita căutată este 1.