

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'_t(x) = 3x^2 + t^2$

b) $f'_t(x) = 3x^2 + t^2 > 0$ pentru orice x real, deci funcția este strict crescătoare. $\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = -\infty$,
 f_t continuă $\Rightarrow f_t$ surjectivă. Cum funcția este strict crescătoare, deci injectivă, înseamnă că ea este inversabilă.

c) Avem $g^3(t) + t^2 g(t) = 1$, unde $1 \geq g(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - t^2 g(t)} = 1 = g(0)$.

2a) $f(1) = \int_0^1 (t^2 + 1) \sqrt{t} dt = \frac{20}{21}$.

b) $f(x) = \frac{2x^3 \sqrt{|x|}}{7} + \frac{2x \sqrt{|x|}}{3}$, deci $f(-x) = -f(x)$, adică f este impară.

c) Conform teoremei lui Lagrange, există $c_x \in (x, x+1)$ astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = (c_x^2 + 1) \sqrt{c_x}$.

Cum $\frac{(x^2 + 1) \sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x}} < \frac{(c_x^2 + 1) \sqrt{c_x}}{x^2 \sqrt{x}} < \frac{((x+1)^2 + 1) \sqrt{x+1}}{x^2 \sqrt{x}}$, rezultă că limita căutată este 1.