

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ deci $y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$$\textbf{b)} \quad g'(x) = f'(x+1) - f'(x) - f'\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)' = 0 \Rightarrow g = \text{constanță} = g(0) = 0$$

$$\textbf{c)} \quad \arctg \frac{1}{k^2+k+1} = \arctg(k+1) - \arctg k, \text{ deci } \sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{k^2+k+1} = \arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}, \text{ iar}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\textbf{2.a)} \quad I_1 = \int_0^1 e^{-x} x dx = \int_0^1 x(e^{-x})' dx = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1.$$

$$\textbf{b)} \quad I_n = \int_0^1 (-e^{-x})' x^n dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^1 + n \int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx = -e^{-1} + nI_{n-1}.$$

$$\textbf{c)} \quad \text{Avem } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$