Soluție

1.a) $\lim\limits_{x \searrow k} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x \nearrow k} f(x) = -\infty,\ \mathrm{k} \in \{1,2,...,2009\}$, deci $x = k$ este asimptota verticală pentru $\mathrm{k} \in \{1,2,...,2009\}$. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow$ $\mathrm{y}=0$ este asimptota orizontală spre ∞ și spre $-\infty$.

b) $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe fiecare interval inclus în A. Din $\lim\limits_{x \searrow k} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x \nearrow k+1} f(x) = -\infty$ reiese că avem câte o soluție pe fiecare interval $(k, k+1)$, $k \in \{1, 2, 3, ..., 2008\}$, adică 2008 soluții. Apoi, din $\lim\limits_{x \searrow 2009} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0,$ reiese că, pentru $a \neq 0$, mai avem și o soluție în $(-\infty, 1) \cup (2009, \infty)$.

c) $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} + \dfrac{2}{(x-2)^3} + ... + \dfrac{2}{(x-2009)^3}$ se anulează în $(k, k+1)$ o singură dată, deci, avem 2008 puncte de inflexiune.

2.a) $f'(x) = e^{-x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $f''(x) = -2xe^{-x^2} \leq 0$, $\forall x \in [0;\infty) \Rightarrow f$ este concavă pe $[0;\infty)$.

c) $f(n) = \int_0^n e^{-t^2} dt$ și $f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} e^{-t^2} dt > 0 \Rightarrow (f_n)_{n \geq 1}$ crescător. $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pentru $t \geq 1 \Rightarrow$ $f(n) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^n e^{-t} dt \leq 1 + \left(e^{-1} - e^{-n}\right) \leq 2 \Rightarrow (f_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. Deci $(f_n)_{n \geq 1}$ este convergent.