

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \leq 0, \forall x \in [0; \infty)$ .

**b)**  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg(x+1) - \arctg x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = 1$ .

**c)** Fie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - x + \frac{x^3}{3}$ , atunci  $g'(x) = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0$ , deci  $g$  este strict crescătoare. Cum  $g(0) = 0$ , rezultă  $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ .

**2.a)**  $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ .

**b)**  $F'(x) = x^4 f(x) > 0$  pentru  $x \in \mathbb{R}^*$ , deci  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

**c)** Fie  $A = \int_1^a f(x)dx$ . Dacă  $a < 1$ , atunci  $A < 0 < \frac{1}{4}$ , iar dacă  $a \geq 1$ , atunci  $A \leq \int_1^a \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+a^2)} < \frac{1}{4}$ .