Soluție

1.a) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \le 0, \forall x \in [0;\infty)$.

b) L = $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(f(x+1) - f(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{1+(x+1)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{2}{x^3}} = 1$.

c) Fie $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x + \dfrac{x^3}{3}$, atunci $g'(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2} \ge 0$, deci g este strict crescătoare. Cum $g(0) = 0$, rezultă $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$.

2.a) $\int_0^1 x(1+x^2) f(x)dx = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 2.$

b) $F'(x) = x^4 f(x) > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}^*$, deci F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Fie $A = \int_1^a f(x)dx.$ Dacă $a < 1,$ atunci $A < 0 < \dfrac{1}{4}$, iar dacă $a \ge 1,$ atunci $A \le \int_1^a \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(1+a^2)} < \dfrac{1}{4}$ **.**