Soluție

1.a) $f'(x)=nx^{n-1}-n$ şi $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}\geq 0, \quad \forall x\geq 0$, deci f este convexă.

b) Şirul lui Rolle ataşat ecuației $x^n-nx-1=0,\ x\geq 0$ este:

x	0	1	∞
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

de unde concluzia.

c) Avem $f_n(1)<0$ şi $f_n(n)=n^n-n^2-1>0$ pentru $n\geq 3$, deci $1<x_n<n$. Din $x_n=\sqrt[n]{1+nx_n}$ rezultă $1\leq x_n\leq\sqrt[n]{1+n^2}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\ln\left(1+e^x\right)\Big|_0^1=\ln\dfrac{1+e}{2}$.

b) $g'(x)=f(x)\cos x+f(-x)\cos x=\cos x$, deci g este crescătoare pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ şi descrescătoare pe $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

c) Din $g'(x)=\cos x$ şi $g(0)=0$, rezultă $g(x)=\sin x,$ deci $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$