

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluție**

**1.a)**  $f'(x) = nx^{n-1} - n$  și  $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0, \forall x \geq 0$ , deci  $f$  este convexă.

**b)** Șirul lui Rolle atașat ecuației  $x^n - nx - 1 = 0, x \geq 0$  este:

$x$	0	1	$\infty$
$f(x)$	-	-	+

de unde concluzia.

**c)** Avem  $f_n(1) < 0$  și  $f_n(n) = n^n - n^2 - 1 > 0$  pentru  $n \geq 3$ , deci  $1 < x_n < n$ . Din  $x_n = \sqrt[n]{1 + nx_n}$  rezultă  $1 \leq x_n \leq \sqrt[n]{1 + n^2}$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**2.a)**  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(1 + e^x) \Big|_0^1 = \ln \frac{1+e}{2}.$

**b)**  $g'(x) = f(x)\cos x + f(-x)\cos x = \cos x$ , deci  $g$  este crescătoare pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  și descrescătoare pe  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

**c)** Din  $g'(x) = \cos x$  și  $g(0) = 0$ , rezultă  $g(x) = \sin x$ , deci  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .