

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a)
$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x + 2}{3\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)^2}} - \frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{(x^3 - x + 1)^2}}$$
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \text{ deci ecuația este } y = x.$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(x^3 - x + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x + 1)^3}} = 1, \text{ deci}$$

$y = 1$ este asimptotă spre $+\infty$.

c) Din $f(k) = \sqrt[3]{k(k+1)(k+2)+1} - \sqrt[3]{(k-1)k(k+1)+1}$ deducem $\sum_{k=1}^n f(k) = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} - 1$.

Limita cerută este de tipul 1^∞ și devine $l = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} - n - 1)} = e^0 = 1$.

2.a)
$$f_1(e) = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{t^2}{2} \right)' \ln t dt = \frac{t^2 \ln t}{2} \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e t dt = \frac{e^2}{4} + \frac{3}{4e^2}.$$

b) $f'_n(x) = x^n \ln x$, iar $x \in (0;1) \Rightarrow \ln x \leq 0 \Rightarrow f'_n(x) \leq 0$

c) $-1 \leq \ln t \leq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{e}; 1 \right]$, rezultă $-\int_{\frac{1}{e}}^1 t^n \leq f_n(1) \leq 0$, adică $-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)e^{n+1}} \leq f_n(1) \leq 0$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$$