

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1a) $f'(x) = e^x + 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția este strict crescătoare

b) Din punctul anterior rezultă că funcția este injectivă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, funcția este continuă, deci surjectivă, adică inversabilă.

c) Cu substituția $x = f(y)$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{\ln(e^y + y^3 - y^2 + y)} = 1$.

2a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 \ln 3 - 3 \ln 2$.

b) $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

c) $nI_n = \int_0^1 nx^n \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{2x(x^n)'}{x+2} dx - \int_0^1 \frac{x(x^n)'}{x+1} dx = \frac{1}{6} - 4 \int_0^1 \frac{x^n}{(x+2)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx$, de unde

rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{6}$