ÉRINTVE A GÖRBÉT

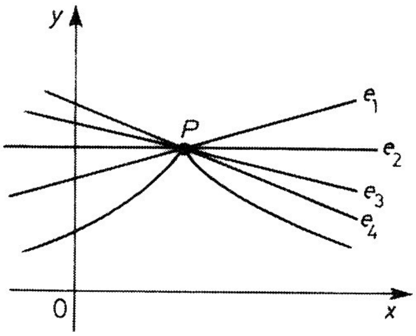
Készítette: Szigeti Zsolt

Felkészítő tanár: Báthori Éva

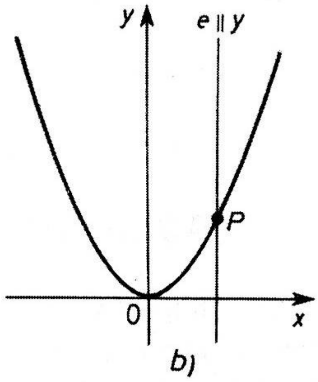
2010 október

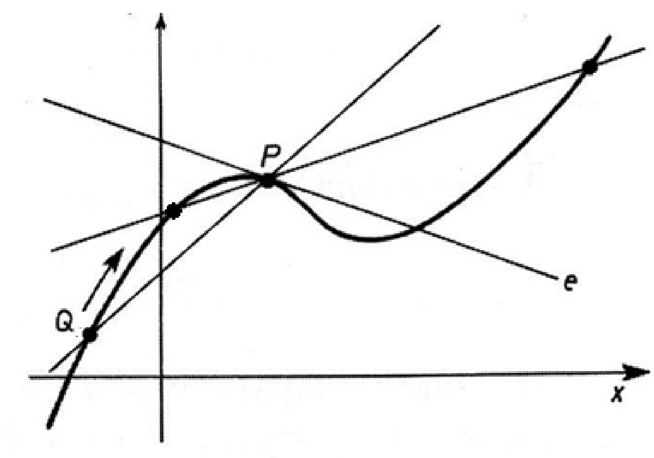
Dolgozatom témája a különböző függvények, illetve mértani alakzatok görbéjéhez húzott érintő egyenletének a meghatározása. Ezen téma keretén belül szeretném tárgyalni a kúpszeletekhez, illetve az elemi függvények grafikus képéhez húzott érintők egyenletét.

Az érintő:



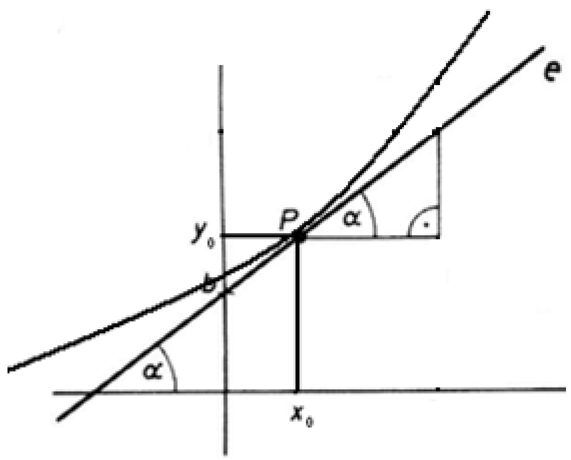
Az érintő az az egyenes, amelynek a görbével egyetlen közös pontja van, szól az általános iskolában meghatározott érintő definíciója. Nos, a meghatározás tulajdonképpen igaz, hiszen az érintőnek és a görbének valóban csak egy közös pontja lehet, de nem minden esetben. Amit a baloldali ábra is mutat, ez a meghatározás nem teljesen pontos. Hiszen az ábrán látható görbének nagyon sok érintője lehetne, lásd az e_1, e_2, e_3 és e_4 egyeneseket. A jobboldali képen látható, hogy az e egyenes, ahol fennáll az $e \parallel y$ (vagy $e \parallel Oy$) tengellyel, ami nyilvánvalóan nem nevezhetünk érintőnek, vagy képzeljük el a szinusz függvény grafikus képét és próbáljunk meg olyan érintőt húzni egy tetszőleges pontban úgy, hogy ne metsze az érintő a függvény grafikus képét. Tehát nyilvánvaló, hogy az érintő definícióját pontosítanunk kell.





Legyen az $f(x)$ függvény mindenütt folytonos. Rögzítsünk a grafikus képen egy P tetszőleges pontot és egy P-től különböző tetszőleges pontot, jelen esetben Q. Mozgassuk a Q pontot a grafikus képen a P pont felé. Minél inkább közelítjük a Q pontot a P ponthoz a két pont által meghatározott egyenes egyre inkább közelít egy úgynevezett határhelyzethez. Ezt nevezzük a grafikus kép P pontban húzott érintőjének.

Felhasználva az általános iskolákban tanultakat: egy egyenes egyenletét a következő egyszerű módon írhatjuk fel: $y = mx + n$, ahol az m az egyenes iránytényezője, az egyenes és az Ox tengely által alkotott szög tangense. Jelöljük az egyenes az Ox tengellyel bezárt szöget α-val.



Tekintsül az $y = f(x)$ egyenletű görbét és az $e: y = mx + n$ egyenletű érintőt. Tudjuk, hogy az érintő iránytényezője $m = \operatorname{tg}\alpha$, de a $\operatorname{tg}\alpha$ kifejezhető a rajzon látható háromszögből. E szerint $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, mivel a függvény deriváltja

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

az e egyenes pedig akkor lesz érintője az $y = f(x)$ egyenletű görbének ha $x \to x_0$ vagyis állíthatjuk azt, hogy a függvény deriváltja x_0-ban nem más mint az érintő iránytényezője. Tehát felírhatjuk az:

$e: y = f'(x_0) \cdot x + n$ mivel az x_0 pontban az érintő függvényértéke és a görbe függvénértéke megegyezik ezért felírható:

$f(x_0) = n = f'(x_0) \cdot x_0 + n \Rightarrow n = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ ezt visszahelyettesítve az érintő egyenletébe kapjuk, hogy:$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, amit ha rendezünk:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

És ez az összefüggés az érintő általános deriválással meghatározott képlete.

Elemi függvények érintőjének egyenlete:

a) A másodfokú függvény:

A másodfokú függvény a következő képpen határozható meg:$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$. Most határozzuk meg a $P(x_0, f(x_0))$ pontban meghatározott érintő egyenletét felírni. $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ az érintő egyenlete.Az $f'(x)$-et az iskolában tanult deriválási képletek segítségével így határozhatjuk meg:

$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = a(x^2)' + b(x)' + (c)' =$

$= 2ax + b + 0 = 2ax + b$ innen felírhatjuk:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$y = (2ax_0 + b) \cdot (x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c$

$y = 2axx_0 - 2ax_0^2 + bx - bx_0 + ax_0^2 + bx_0 + c$

$y = 2axx_0 - ax_0^2 + bx + c$

$y = x(2ax_0 + b) + c - ax_0^2$

b) Trigonometrikus függvények:

A szinusz függvény így írható fel:$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ $f(x) = \sin x$.Hasonlóan az előzőhöz az érintő deriváltal meghatározott egyenletéből indulunk ki.

$$f'(x_0) = (\sin x_0)' = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x-x_0}{2} = \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x-x_0}{2} = \cos\frac{2x_0}{2} = \cos x_0$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \ \Longrightarrow y = \cos x_0 (x - x_0) + \sin x_0$$

A koszinusz függvényt hasonlóan vezetjük le, tudva, hogy $(\cos x_0)' = -\sin x_0$ végeredményül kapjuk az :$y = -\sin x_0\,(x - x_0) + \cos x_0$ egyenletű egyenest.

Az $f\colon \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ és $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény érintőjének egyenlete egy $P(x_0, f(x_0))$ pontban a következő képpen írható fel:

$$y = (\operatorname{tg} x_0)' \cdot (x - x_0) + \operatorname{tg} x_0$$

$$(\operatorname{tg} x_0)' = \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\sin(x-x_0)}{\cos x \cdot \cos x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

vagyis $y = \frac{1}{\cos^2 x_0}(x - x_0) + \operatorname{tg} x_0$.

Az $f\colon \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény érintőjének egyenletét az előzőhöz hasonló módon vezetjük le, tudva, hogy , $f'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, az érintő egyenlete így írható fel: $y = -\frac{1}{\sin^2 x_0}(x - x_0) + \operatorname{ctg} x_0$.

c) Exponenciális és logaritmus függvény:

Az exponenciális függvény:$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0;+\infty)$, $f(x) = a^x$, $a \geq 2$. Ahhoz, hogy meghatározzuk az érintő egyenletét egy tetszőleges pontban, ahhoz meg kell határoznunk a függvény deriváltjának értékét az x_0 pontban, amit a következő képpen határozunk meg:

$$f'(x_0) = (a^x)' = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x_0}\cdot(a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} a^{x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} \cdot \ln a = a^{x_0} \cdot \ln a$$

Miután meghatároztuk a függvény deriváltját, azután a kapott értéket behejettesítjük, ahogy az előző esetekben az érintő egyenletébe:

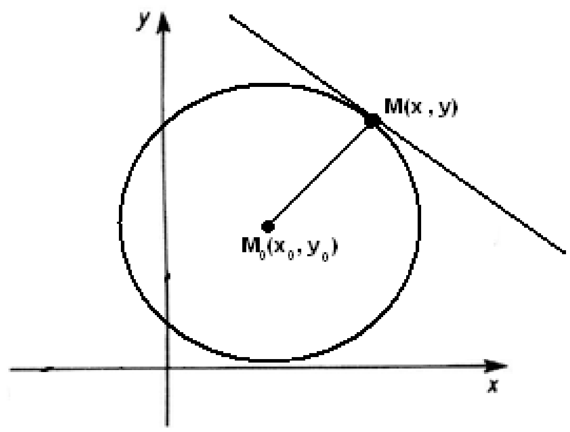
$y = a^{x_0} \cdot \ln a \cdot (x - x_0) + a^{x_0} \;\Leftrightarrow y = a^{x_0} \cdot (\ln a^{x-x_0} + 1)$

A logaritmus függvény : $f{:}\,(0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,, f(x) = \log_a x \;\; a \geq 2$. Az érintő egyenletének a felírása itt is hasonló módon történik mint az előző esetekben. Vagyis, tudva azt, hogy a függvény deriváltjának értéke:

$f'(x_0) = (\log_a x_0)' = \frac{1}{x_0 \cdot \ln a} \;\; \Rightarrow y = \frac{1}{x_0 \cdot \ln a} \cdot (x - x_0) + \log_a x_0$

Egyes kúpszeletek érintőjének egyenlete:

a) A kör:



Az előző eseteknél, az érintő egyenletét a függvények és azok deriváltja segítségével határoztuk meg. Ez azonban nem működik a körnél, illetve a többi kúpszeletnél. A kör mint egy függvény grafikus képe nem értelmezhető, ugyanis egy tetszőleges x pontnak több, számszerint 2 függvényérték felelne meg.

Tudjuk, hogy két $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ pont távolsága:

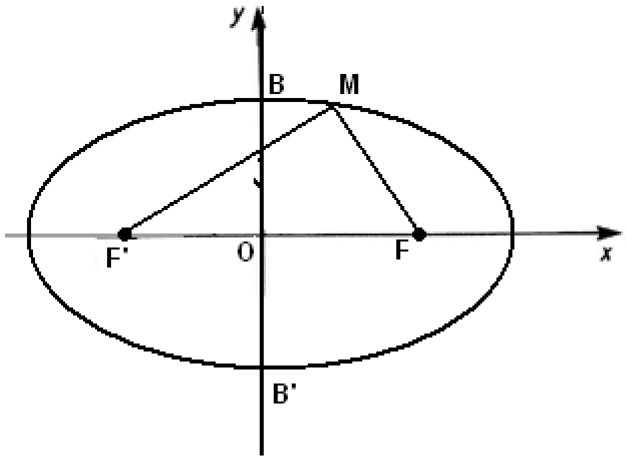
$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. A kör egyenletét legegyszerűbben úgy érthetjük meg, ha arra gondolunk, hogy hogyan rajzolunk körzővel kört. A körzőn először beállítjuk a kör sugarát, majd egy rögzített pontból megrajzoljuk a kört. Ha a rögzített pontunk, ahogy az ábra mutatja az M_0 pont és a körzőn lévő ceruza hegye az M pont, akkor a kört úgy kapjuk meg, hogy az M pont helyzetét úgy változtatom, hogy az az M_0 ponttól mindig r távolságra legyen. Vagyis a kör minden pontját úgy kapom meg, hogy az a pont és a kör középpontja közötti távolság mindig r legyen, ahol az r a kör sugara. Tehát felírhatjuk: $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ vagy felírthatom úgy, hogy: $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

Legyen a $C{:}\,(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ egyenletű kör. Az $M_1(x_1, y_1) \in C$ pont helyzetét az $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektor határozza meg. Az $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\vec{\imath} + (y_1 - y_2)\vec{\jmath}$ vektor nem más mint a kör érintőjének az irányvektora. Az iskolában tanult dolgok alapján egy egyenes irányvektorának segítségével az egyenes egyenletét így írhatjuk fel:

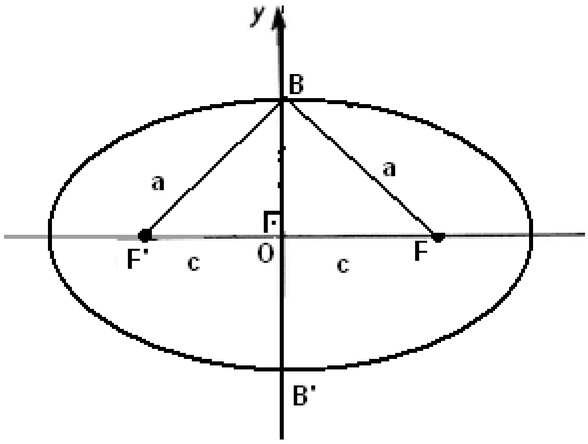
$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$. Bebizonyítható a Descares féle duplázási képlet: ha $M_1(x_1, y_1) \in C$ akkor felírható az érintő egyenlete: $(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2$.

Az ellipszis:

Akárcsak a körnél, az érintő egyenletének meghatározása nem történehet deriváltak segítségével, ugyanis az elipszist sem írhatjuk fel függvény formájában.



Legyen egy $c \in \mathbb{R}$ és két F, illetve F' rögzített pontok, melyre igaz a $d(F', F) = 2c$ összefüggés. Ha a egy a c-nél nagyobb szám, akkor az ellipszis egyenletét felírhatom úgy, hogy: $d(M, F') + d(M, F) = 2a$, ahol az $M(x, y)$. Eszerint felírhatom a következő összefüggést:



$d(B, F) + d(B', F') = 2d(B, F) = 2a.$ A mellékelt ábrát és a fenti összefüggésből felírhatom a $F(c, 0), F'(-c, 0), B\left(0, \sqrt{a^2 - c^2}\right), B'(0, \sqrt{a^2 - c^2})$ pontokat. Az utóbbi összefüggésből következik és bizonyítható a következő: egy $M(x, y)\epsilon E \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol a $b^2 = a^2 - c^2$. Ezt az egyenletet felírhatjuk a következő formában:

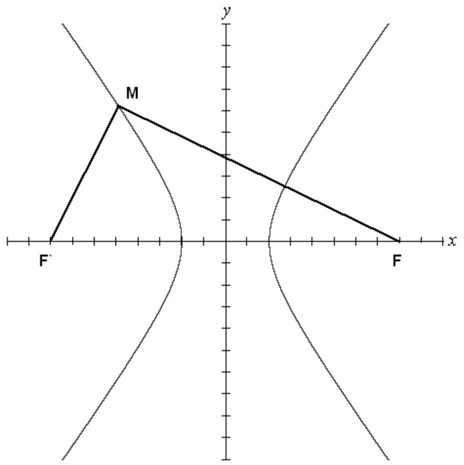
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & x \in \mathbb{R} \backslash [-a, a] \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & x \in [-a, a] \end{cases} \qquad E = E_1 \cup \{(-a, 0), (0, a)\} \cup E_2$$

ahol az $(-a, 0), (0, a)$ pontok csúcspontok. Ilyen formában már az elipszist felbonthatjuk 2 függvényre: az $E_1: y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, , x_0 \in (-a, a), y_0 > 0$, ami az ellipszis $y \geq 0$ félsíkban, illetve az $E_2: y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, ami az ellipszis $y \leq 0$ félsíkban fekvő részét ábrázolja.Legyen az $M_0(x_0, y_0) \in E_1$. Az M_0-ban húzott érintő egyenletét tehát felírhatjuk úgy, hogy: $y = (y_0)' \cdot (x - x_0) + y_0$, ahol az $y_0' = -\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$, tehát az érintő egyenlete: $y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0\, , x_0 \in (-a, a), y_0 < 0.$

Ugyanígy kapjuk meg az $M_0(x_0, y_0) \in E_2$ Az M_0-ban húzott érintő egyenletét:

$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$, illetve $y_0 \neq 0, x = -a, x = a$ egyenletek mind az $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ egyenlet sajátos esetei, ami az érintő egyenlete az M_0pontban.

b) A hiperbola:



Akárcsak a körnél és az elipszisnél az érintő egyenletének meghatározása nem történehet deriváltak segítségével, ugyanis az elipszist sem írhatjuk fel függvény formájában.

Legyen a $c \in \mathbb{R}^+$ és az F, F' rögzített pontok, melyre a $d(F, F') = 2c$ teljesül. Ha az $a \in (0, c)$ a hiperbola minden pontját így határozhatjuk meg: $|d(M, F') - d(M, F)| = 2a$ .Az elipszishez hasonlóan felírhatjuk a pontok koordinátáit és ezáltal a következő összefüggést kapjuk: az $M(x, y)$ pont akkor tartozik a hiperbolához, ha teljesül a $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol az elipszishez hasonlóan $b^2 = a^2 - c^2$. Az érintő egyenletének meghatározásának a módszere nagyon hasonló az elipszisnél alkalmazott módszerre. Itt is felbonthatjuk a fenti összefüggést 2 függvényre:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & x \in (-a, a) \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty) \end{cases}$$

Az elipszisnél használt módszer itt is ugyan úgy alkamazható és végerdényként megkapjuk a : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$összefüggést, ami a hiperbola érintőjének az egyenlete.

Megoldott feladatok:

Ez előzőekben bemutattam az érintő egyenletének különféle meghatározási módszerének elméleti részét. Most pedig egy pár feladat keretén belül szeretném bemutatni az eddig elmondott elmélet gyakarloti alkalmazását.

1. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x + 3$ függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét, ahol a grafikus képhez húzott érintő párhuzamos az $y = 5x + 3$ egyenletű egyenessel!

Két féle képpen lehet megoldani ezt a feladatot. Az első módszer az a következőkön alapul:

Tudjuk, hogy az $e \parallel y = 5x + 3$ ebből következik, hogy az iránytényezőjük megeggyezik, vagyis az $y = 5x + 3$-hoz rendelt függvény deriváltja megeggyezik az érintőjével. Tehát $f(x) = (5x + 3)' = 5$. Az

$f'(x) = (x^2 - 7x + 3)' = 2x - 7$ így felírhatjuk: $2x - 7 = 5 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow$

$\Longrightarrow M(6, f(6)) \Longrightarrow M(6, -3)$

$y = f'(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = 5(x - 6) + f(-3)$ így megkapjuk a $y = 5x - 33$ egyenletű egyenes egyenletét.

A második módszer az azon alapaszik, hogy felírjuk az $e: y = mx + n$, de mivel az érintő párhuzamos az $y = 5x + 3$ egyenessel, felírhatjuk az $e: y = 5x + n$ egyenletet. Itt az előző megoldási módszertől eltérően, nem próbáljuk meghatározni azt a pontot ahol metszi egymást az $f(x)$ függvény és az érintő, hanem felírjuk a következő összefüggést:

$\begin{cases} y = 5x + n \\ y = x^2 - 7x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7x + 3 = 5x + n \Rightarrow x^2 - 14x + 3 - n = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek csak egy megoldása lehet. Ezt az teszi lehetővé, hogy a másodfokú deltája 0.

$\Delta = (-14)^2 - 4(3 - n) = 0$

$144 - 12 + 3n = 0$

$n = -33$ a kapott eredmény visszahelyettesítjük az érintő egyenletébe. Így kapjuk a: $e: y = 5x - 33$. Szemmel látható, hogy a két végeredmény ugyan az.

2. Adott egy $x^2 + y^2 = 5$ egyenletű kör. Határozzuk meg az $A(-1,2)$ pontban húzott érintő egyenletét!

Felírhajuk az: $e: y = mx + n$ érintő egyenletét. Mivel az A pont rajta van az érintőn ezért felírhatjuk $2 = -m + n \Rightarrow m = n - 2$ ezt visszahelyettesítjük az eredeti összefüggésbe: $y = (2 - n)x + n$. Az így kapott egyenletet behellyettesítjük a kör egyenletébe:

$$x^2 + [(n-2)x + n]^2 = 5$$

$$x^2 + (n-2)^2x^2 + 2(n-2)xn + n^2 = 5$$

$$(n^2 - 4n + 5)x^2 + (2n^2 - 4n)x + n^2 - 5 = 0$$

$$\Delta = (2n^2 - 4n)^2 - 4(n^2 - 4n + 5)(n^2 - 5) =$$

$$= 4n^4 - 16n^3 + 16\mathrm{n}^2 - 4(n^4 - 5n^2 - 4n^3 + 20n + 5n^2 - 25) =$$

$$= 16n^2 - 16n^3 + 4n^4 - 4n^4 + 20n^2 + 16n^3 - 80n - 20n^2 + 100 =$$

$$= 16n^2 - 80n + 100$$

Ez a delta egyenlő kell legyen nullával, ahhoz, hogy csak egy megoldása legyen, vagyis az érintő csak egy pontban metsze a kört. Így a:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16n^2 - 80n + 100 = 0 \Rightarrow 4n^2 - 10n + 25 = 0 \Rightarrow (2n-5)^2 = 0 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$

Az így kapott n segítségével kiszámoljuk az: $m = 2 - n = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$. Tehát felírhatjuk: $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Longrightarrow -x + 2y = 5$.

Más megoldása az, hogy a kör egyenletét: $x^2 + y^2 = 5$ felírhatjuk a Descates féle duplázási képlettel, hogy az érintő egyenlete: $xx_0 + yy_0 = 5$. Mivel az A pont az érintő egy pontja, ezért az érintő egyenlete: $-x + 2y = 5$.

Egy harmadik módszer az, hogy kifejezem az $x^2 + y^2 = 5$-ből az $y = \sqrt{5 - x^2}$. Ezt tekinthetem az $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ függvénynek. Felhasználjuk az érintő általános deriváltal felírt képletét: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$f'(x) = \left(\sqrt{5 - x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5 - x^2}} \cdot (5 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{5 - x^2}}$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Longrightarrow y = \frac{1}{2}(x + 1) + 2 \Longrightarrow -x + 2y = 5$$

Irodalomjegyzék:

[1] Balázs Márton és Hatházi Annamária: Matematikai Analízis
[2] András Szilárd, Csapó Hajnalka-Matematikai Analízis-11. osztály
[3] A Pallas Nagy Lexikona
[4] Geometriai Feladatok gyüjteménye
[5] Ormay Lajos: A Mathematika A Positiv Philosophia Rendszerében.
[6] Mircea Ganga-Matematika-11. osztály
[7] http://abrgeom.uw.hu/segedanyagok/gorbe.pdf
[8] http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/11-evfolyam/2_tanari_modulok/amat11_7_tanar.pdf
[9] http://miau.gau.hu/levelezo/2006osz/gazdmat_1/7deriv%E1lt.pdf

Személyes adataim és elérhetőségeim:

Név: Szigeti Zsolt

E-mail cím: zsoltiszigeti@gmail.com

Mobil telefonszám: 0721798064

Fix telefonszám: 0359410035

Felkészítő tanár: Báthori Éva

Felkészítő tanár e-mail címe: bathorii@rdslink.ro