



Concursul Național de Matematică Aplicată „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 09 februarie 2013

Clasa a XII-a

1. Se consideră grupul $G = (3, +\infty)$ în raport cu legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Determinați numerele reale a și b astfel încât funcția $f: \mathbf{R}^* \rightarrow G$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism de la grupul (\mathbf{R}_+^*, \cdot) la grupul $(G, *)$;

b) Să se calculeze $x^{(n)} = x * x * x * \dots * x$ de n ori;

c) Să se determine numărul natural nenul n astfel încât să avem: $\underbrace{4 * 4 * 4 * \dots * 4}_{n \text{ ori}} = 2n + 2$.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x^2 - 4} + \frac{1}{x}, & x < 1 \\ \frac{2}{x^2} + 2\sqrt{x} - 6, & x \geq 1 \end{cases}$. Să se demonstreze că funcția admite

primitive pe $(0, \infty)$ și să se determine o primitivă al cărei grafic trece prin punctul $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$.

3. Fie mulțimea $G = \left\{ X \in M_2(\mathbf{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$.

a) Arătați că mulțimea $H = G - \{O_2\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricilor.

b) Determinați numărul de soluții ale ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

4. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g .

b) Să se calculeze $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx, x \in \mathbf{R}$.

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.