XXIII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyszalonta, 2013. január 31 - február 3.

IX. osztály

I. forduló

1. Feladat. Határozd meg a következő egyenlet összes $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldását:

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 20 = 0.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. A sík pontjait két színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét két lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindkét színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy:

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

3. Feladat. Az ABC általános háromszög (AB) és (AC) oldalainak belsejében felvesszük a D illetve E pontokat úgy, hogy $BD = CE$. Jelöljük F illetve G-vel a (BC) valamint (DE) szakaszok felezőpontját. A B pontból az FG egyenesre húzott merőleges az AC egyenest H-ban, az A-ból a BH-ra húzott merőleges a BC-t K-ban metszi. Bizonyítsd be, hogy fennáll a $BK \cdot AC = AH \cdot KC$ egyenlőség!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

4. Feladat. Határozd meg az

$$\begin{cases} x^{2013} + y^{2011} &= 2z^{2009} \\ y^{2013} + z^{2011} &= 2x^{2009} \\ z^{2013} + x^{2011} &= 2y^{2009} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásait!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

5. Feladat. Az ABC háromszögben $AB = AC$. M és N a (BC) alap két olyan belső pontja, amelyre $m(\widehat{MAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$. Igazold, hogy $BM + NC > MN$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Feladat. Tekintsünk egy 5×5-ös táblázatot. A táblázat kitöltése alatt azt értjük, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 25$ számokat beírjuk a táblázat celláiba úgy, hogy minden cellába pontosan egy szám kerüljön (és minden szám pontosan egy cellában jelenjen meg).

a) Létezik-e olyan kitöltés, mely esetén a táblázat négy sorában a számok szorzata egymással egyenlő?

b) Szerkesszél olyan kitöltést, mely esetén a táblázat három sorában a számok szorzata egymással egyenlő!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megjegyzések

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

X. osztály

I. forduló

1. Feladat. Határozd meg az összes olyan (x, y) természetes számpárt, amelyre

$$x^2 + 8x + 7 = 3^y.$$

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

2. Feladat. Egy táblára felírtuk a természetes számokat 1-től 2013-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot a tábláról, a-t és b-t, letöröljük a két kiválasztott számot majd felírjuk helyettük az $ab - 3a - 3b + 12$ kifejezés értékét. Melyik szám marad utolsónak a táblán?

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Feladat. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög. Jelöljük A_1-gyel az A-ból a BC-re húzott merőleges talppontját, B_1-gyel az A_1-ből az AC-re húzott merőleges talppontját, C_1-gyel a B_1-ből az AB-re húzott merőleges talppontját és A_2-vel az AA_1 és B_1C_1 metszéspontját. Az $A_1A_2B_1$ háromszög területe negyede az ABC háromszög területének. Határozd meg a C szög mértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Hány különböző módon fedhető le egy 4×7-es téglalap 1×1-es, 2×2-es és 3×3-as kis négyzetek segítségével, átfödés, hiány illetve kilógó részek nélkül?

Komán Zsombor, Brassó

5. Feladat. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók O metszéspontjából az AB-re merőlegesen húzott $[OE]$ szakasz ($E \in (AB)$) a CD-t F-ben metszi. Jelöljük G-vel az F pontnak az AC-re eső vetületét, H-val pedig a DG és az OF egyenesek metszéspontját. Tudjuk, hogy $AB = 15$, és $AE = 3$. Számítsd ki a CDH háromszög területét a $k = \frac{OD}{OA}$ arány függvényében!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Feladat. A következő két oszthatóság közül melyik teljesül több $n \in \mathbb{N}$ szám esetén:

$$\left[\frac{\pi n}{7}\right] \Big| n \quad \text{vagy} \quad \left[\frac{\pi n}{5}\right] \Big| n,$$

ahol $[a]$-val az a valós szám egészrésze.

Komán Zsombor, Brassó

Megjegyzések

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

XI. osztály

I. forduló

1. Feladat. A tér pontjait három színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét három lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindkét színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

2. Feladat. Egy iskola főépülete és bentlakása közé egy $1m \times 10m$ méretű, téglalap alakú sétányt akarnak kialakítani. A sétány elkészítéséhez fehér, piros, zöld és szürke színű, $1m$ oldalhosszúságú, négyzet alakú betonlapokat használnak. Hány különböző tervet lehetne a sétány elkészítésére készíteni, ha a piros betonlapok száma páros kell legyen?

Mátéfi István, Marosvásárhely

3. Feladat. Legyen p és q két, nem feltétlenül különböző pozitív prímszám. Bizonyítsd be, hogy ha a két prímszám reciprokával, valamint a két prím összegének reciprokával, mint hosszúságokkal szerkeszthető háromszög, akkor $\left[\frac{p}{q}\right] = 1$ vagy $\left[\frac{q}{p}\right] = 1$ (az x valós szám egészrésze $[x]$, azaz az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb)!

Bíró Bálint, Eger

4. Feladat. Az $ABCD$ négyzet (AB) oldalán felveszünk egy tetszőleges M pontot. Az $\widehat{MCD}$ szögfelezője az (AD) oldalt P-ben metszi. Legyen S a CD egyenes azon pontja, amelyre
$CS = CM + MB$ és $D \in (CS)$. Bizonyítsd be, hogy a CPS háromszög területe nem függ az M pont megválasztásától!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

5. Feladat. Adott $k \geq 3$ különböző gömb a térben, amelyek felületei metszik egymást az origóban. Minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ index esetén legyen A_i az origónak az i-edik gömb középpontja szerinti szimmetrikusa. Feltételezzük, hogy az $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ halmazban nincs három kollineáris pont és tekintsük a halmaz pontjai által meghatározott konvex testet (poliédert). Igazoljuk, hogy ez a test benne van a gömbök és belső tartományaik egyesítésében!

ifj. Kolumbán József, Kolozsvár

6. Feladat. Sir Lancelot csak akkor indul a lovagi tornán, ha tudja, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel győzni fog. Minden összecsapás esetén az ellenfelek győzelmének valószínűsége a harcképességükkel arányosan oszlik meg és minden n természetes szám esetén Lancelot n-edik ellenfelének a harcképessége $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$, míg Lancelot harcképessége mindig 1. Hány lovag jelentkezhetett a tornára, ha Lancelot úgy döntött, hogy ő is indul?

Komán Zsombor, Brassó

Megjegyzések

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 plusz-

XII. osztály

I. forduló

1. Feladat. A tér pontjait három színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét három lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindkét színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

2. Feladat. Egy iskola főépülete és bentlakása közé egy $1m \times 10m$ méretű, téglalap alakú sétányt akarnak kialakítani. A sétány elkészítéséhez fehér, piros, zöld és szürke színű, $1m$ oldalhosszúságú, négyzet alakú betonlapokat használnak. Hány különböző tervet lehetne a sétány elkészítésére készíteni, ha a piros betonlapok száma páros kell legyen?

Mátéfi István, Marosvásárhely

3. Feladat. Legyen p és q két, nem feltétlenül különböző pozitív prímszám. Bizonyítsd be, hogy ha a két prímszám reciprokával, valamint a két prím összegének reciprokával, mint hosszúságokkal szerkeszthető háromszög, akkor $\left[\frac{p}{q}\right] = 1$ vagy $\left[\frac{q}{p}\right] = 1$ (az x valós szám egészrésze $[x]$, azaz az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb)!

Bíró Bálint, Eger

4. Feladat. Az $ABCD$ négyzet (AB) oldalán felveszünk egy tetszőleges M pontot. Az $\widehat{MCD}$ szögfelezője az (AD) oldalt P-ben metszi. Legyen S a CD egyenes azon pontja, amelyre
$CS = CM + MB$ és $D \in (CS)$. Bizonyítsd be, hogy a CPS háromszög területe nem függ az M pont megválasztásától!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

5. Feladat. Adott $k \geq 3$ különböző gömb a térben, amelyek felületei metszik egymást az origóban. Minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ index esetén legyen A_i az origónak az i-edik gömb középpontja szerinti szimmetrikusa. Feltételezzük, hogy az $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ halmazban nincs három kollineáris pont és tekintsük a halmaz pontjai által meghatározott konvex testet (poliédert). Igazoljuk, hogy ez a test benne van a gömbök és belső tartományaik egyesítésében!

ifj. Kolumbán József, Kolozsvár

6. Feladat. Sir Lancelot csak akkor indul a lovagi tornán, ha tudja, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel győzni fog. Minden összecsapás esetén az ellenfelek győzelmének valószínűsége a harcképességükkel arányosan oszlik meg és minden n természetes szám esetén Lancelot n-edik ellenfelének a harcképessége $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$, míg Lancelot harcképessége mindig 1. Hány lovag jelentkezhetett a tornára, ha Lancelot úgy döntött, hogy ő is indul?

Komán Zsombor, Brassó

Megjegyzések

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 plusz-