CSÍKSZEREDA POLGÁRMESTERI HIVATALA

TÁMOGATÁSÁVAL

XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

CSÍKSZEREDA

2007. FEBRUÁR 8-11.

A VERSENY SZERVEZÉSÉBEN RÉSZT VÁLLALTAK:

Az iskola igazgatósága
Csapó Hajnalka
Páll Olga
Tamási Csaba
Szatmári Mária
Csonta Ildikó
Demeter István-Hunor
Gyarmati Dénes
Bodor Julianna
Orbán Zsolt
IX. D, X. D, X.E, XI. C osztályok
Az iskola diáktanácsa

A ZSŰRI TAGJAI:

Dr. Szász Róbert	Sapientia EMTE, Marosvásárhely
Dr. András Szilárd	BBTE, Kolozsvár
Bencze Mihály	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Csapó Hajnalka	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Darvas Tamás	BBTE, Kolozsvár
Demeter Albert	BBTE, Kolozsvár
Farkas Csaba	BBTE, Kolozsvár
Sipos Kinga	BBTE, Kolozsvár

ELŐSZÓ

A tudomány és a művészet
Arisztokratizmusa vitathatatlan
Popper Péter

Az Erdélyi Magyar Matematika Verseny 1990-1991-es tanévben indult Brassóból, évente többfordulós vándorversenyként. A versenyt rendre több különböző városban szervezték meg, más-más név alatt, így Brassóban Wildt József Verseny, Sepsiszentgyörgyön Székely Mikó Matematika Verseny, Csíkszeredában Márton Áron Emlékverseny, Székelyudvarhelyen Bolyai Farkas Verseny, Marosvásárhelyen pedig Bolyai Farkas, majd Hegyi Lajos Emlékverseny néven került megrendezésre. A kezdeti nehézségek kiküszöbölésében és a verseny folytonosságának biztosításában fontos szerepe volt a Bíró Béla által igazgatott Székely Mikó Kollégiumnak, ahol több mint 10 alkalommal sikerült a versenyt megszervezni.

Az évek során az EMMV a Nemzetközi Magyar Matematika Verseny erdélyi válogató versenyévé vált és ugyanakkor hazai elismertségét is kivívta. Az idéntől a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika-Informatika Kara az itt szerzett oklevelet beleszámítja a felvételi pontrendszerbe a magyar, a román, illetve az angol tagozaton egyaránt.

A versenyen évente körülbelül 200 diák vesz részt, és az elmúlt 17 év alatt a legjobb versenyző diákok közül több középiskolai tanár, egyetemi oktató, kutató került ki. Reméljük, ez a továbbiakban sem változik. Természetesen a verseny azon kívül, hogy a csúcsteljesítményre képes diákok kiválasztására lehetőséget ad, egy kommunikációs fórumot biztosít úgy a tanároknak, mint a diákoknak és nagymértékben hozzájárul egy reális értékrend kialakításához, hisz ne feledjük, hogy a matematika tanulásának és tanításának igazi célja a világ dolgainak és rendjének minél mélyebb megértése.

Az idei versenyen több kísérleti jellegű újítás is szerepel, a legfontosabb talán a két írásbeli próba bevezetése, ami reméljük, hogy jobb válogatást eredményez.

Köszönettel tartozunk a Márton Áron Gimnázium vezetőségének, tanári karának, a támogatóknak, valamint a felkészítő tanároknak, amiért lehetővé tették, hogy az idén is sikeres, rangos rendezvény jöhessen létre.

András Szilárd

9. osztály

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ esetén $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

Lackó József, Csíkszereda

2. Az $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ számok esetén határozzuk meg az $E(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$ kifejezés minimumát és maximumát az $[a, b]$ intervallumon.

Tamási Csaba, Csíkszereda

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 - 3k + 1\right) x_k^3 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^3.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Egy bálteremben kerek asztalok vannak, minden ülés foglalt. Mielőtt táncra perdülnének a következő játékba kezdenek: mindenki percenként egy üléssel jobbra ül. Ha valamely asztalnál mindenki visszakerül az eredeti helyére, akkor annál az asztalnál ülők a helycsere irányát megváltoztatják. Ha minden asztalnál mindenki megint az eredeti helyén ül, akkor kezdődik a tánc. Lesz-e tánc a bálban?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

5. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ páratlan és nem prímhatvány. Jelölje $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$ az n-nél kisebb és n-nel relatív prímek véges sorozatát. Bizonyítsuk be, hogy:

a) létezik $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$ úgy, hogy $r_j - r_{j-1} = 2$.

b) létezik $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ úgy, hogy $r_i - r_{i-1} = 3$.

Darvas Tamás, Barót

6. Határozzuk meg azokat az $n \geq 1$ természetes számokat, amelyekre léteznek az A, B halmazok úgy hogy

$$A \cap B = \varnothing, A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ és}$$

$$A = \left\{x + y \mid xy \in B, x, y \in \mathbb{N}^*\right\}, B = \left\{xy \mid x + y \in A, x, y \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Dobribán Edgár, Kolozsvár

10. osztály

1. Oldjuk meg az egész számok halmazában az $x^{2008} + y^{2008} = 2008xy - 2006$ egyenletet!

Laczkó József, Csíkszereda

2. Határozzuk meg azokat a tízes számrendszerbeli a, b, c, x számjegyeket, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

i) az $n = \overline{abc}_x + \overline{bca}_x + \overline{cab}_x$ természetes szám osztható 15-tel (x a számrendszer alapját jelenti);

ii) az a, b, c számok egy szigorúan növekvő számtani haladványt alkotnak.

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Oldjuk meg az $\begin{cases} (x+y)^n = x-y \\ (x-y)^n = x+y \end{cases}$ egyenletrendszert, ahol $x, y \in \mathbb{C}$ és $n \geq 1$ rögzített természetes szám.

Tamási Csaba, Csíkszereda

4. Számítsuk ki az $xy + yz + xz$ összeg értékét, ha $x, y, z > 0$ és

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ y^2 + yz + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 3 \end{cases}.$$

Farkas Csaba, Székelykeresztúr

5. Legyen A, B és C egy kör három rögzített pontja. Igazold, hogy az ABC háromszög akkor és csakis akkor egyenlő oldalú, ha $PA + PC = PB$ a B-t nem tartalmazó $\overset{\frown}{AC}$ nyílt körív bármely P pontja esetén.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. A jégkorongcsapat szurkolója szerencsés, ha a szezon összes mérkőzésén jelen volt, amikor a csapat nyert, de egy mérkőzésen sem volt jelen mikor a csapat vesztett. Egy szurkolótábor szerencsés, ha a szezon végére lesz legalább egy szerencsés tagja. Az egyik szurkolótábor kieszelt egy stratégiát, amivel a szezon végére szerencséssé válik, a mérkőzések kimenetelétől függetlenül. Az éppen soron következő mérkőzés előtt döntik el, hogy ki megy el a mérkőzésre és ki nem. Ha a szezonban összesen n mérkőzés van, akkor legalább hány tagja kell legyen a szurkolótábornak? Adjuk meg a szurkolótábor egy lehetséges stratégiáját (köztudott dolog, hogy a jégkorong mérkőzések végeredménye sosem döntetlen).

Darvas Tamás, Barót

11-12. osztály

1. Egy n -ed rendű determináns minden sorában és minden oszlopában az 1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1} számok vannak elhelyezve valamilyen sorrendben úgy, hogy egy sorban, illetve egy oszlopban is minden szám pontosan egyszer szerepel. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen determináns értéke nem nulla.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, O az átlók metszéspontja, G_1 és G_2 az OAB illetve OCD háromszögek súlypontja, H_1 és H_2 az OBC illetve ODA háromszögek magasságpontja. Igazold, hogy $G_1G_2 \perp H_1H_2$.

Tamási Csaba, Csíkszereda

3. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, páros és nem kettőhatvány. Jelölje $r_1 < r_2 < ... < r_k$ az n -nél kisebb, n -nel relatív prímek véges sorozatát. Bizonyítsuk be, hogy létezik $j \in \{2, 3, ..., k\}$ úgy, hogy $r_j - r_{j-1} = 4$.

Darvas Tamás, Barót

4. Egy $m \times n$ -es ($m, n \in \mathbb{N}^*$) táblázat minden mezején egy pohár áll, talpra állított helyzetben. Egy lépés azt jelenti, hogy kiválasztunk i sort és j oszlopot és a közös mezőkben levő poharakat megfordítjuk (vagyis ha talpon álltak, akkor fejre állítjuk, ellenkező esetben talpra állítjuk). Ennek a lépésnek véges sok ismétlésével elérhető-e, hogy minden pohár fejjel lefele álljon? Tárgyalás.

András Szilárd, Kolozsvár

5. Igazold, hogy a Fibonacci-sorozat első $2n$ tagja közül bárhogyan is választunk ki $(n+1)$-et, a kiválasztott számok között mindig lesz két olyan szám, melyek közül az egyik osztója a másiknak!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Egy csiga végigjár egy 10×10-es négyzethálót úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer „lép”, egy mezőről csak oldalszomszédos mezőre léphet. Megszámozzuk a mezőket 1-től 100-ig aszerint, hogy melyik mezőre hányadik lépésénél lépett a csiga. Ezután két tetszőleges oldalszomszédos mezőn szereplő számot ugyanazzal a természetes számmal növelünk, vagy csökkentünk és ezt többször is megismételhetjük. Elérhetjük-e, hogy minden mezőn ugyanaz a szám szerepeljen?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

9. osztály

1. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_n$ természetes számok, amelyekre

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1 .$$

***

2. Az ABC háromszög belső P pontján keresztül meghúzzuk a PA', PB', PC' párhuzamosokat az A, B és C csúcsokból kiinduló oldalfelezőkhöz ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$). Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PG} ,$$

ahol G az ABC háromszög súlypontja.

Longáver Lajos, Nagybánya

3. Az $n \in \mathbb{N}^*$ páros szám esetén az a_1, a_2, ..., a_n számok fele 1-gyel, fele 2-vel egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{a_1 \left\{\frac{2}{3}\right\}} + \sqrt{a_2 \left\{\frac{2^2}{3}\right\}} + \sqrt{a_3 \left\{\frac{2^3}{3}\right\}} + \ldots + \sqrt{a_n \left\{\frac{2^n}{3}\right\}} \leq \frac{n\sqrt{3}}{2} ,$$

ahol $\{x\}$ az $x \in \mathbb{R}$ törtrészét jelöli.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Az M pont az $A_1A_2A_3A_4$ konvex négyszög egy tetszőleges belső pontja. Legyen G_1, G_2, G_3 és G_4 rendre az MA_1A_2, MA_2A_3, MA_3A_4, illetve MA_4A_1 háromszög súlypontja. B_1, B_2, B_3 és B_4 az A_3A_4, A_4A_1, A_1A_2, illetve A_2A_3 oldalak felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy G_1B_1, G_2B_2, G_3B_3 és G_4B_4 összefutó egyenesek.

Tamási Csaba, Csíkszereda

10. osztály

1. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injektív és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ szürjektív függvényt, ha

$$f\left(g(xy)\right)=f(x)\,g(y),$$

bármely $x,y\in\mathbb{R}$ esetén.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\log_{2006}(x-1)+\log_{2007}(x-1)=3-\lg\left(x^{10}-24\right)$$

egyenletet.

Kovács Lajos, Székelyudvarhely

3. a) Igazoljuk, hogy ha α,β,γ páronként különböző komplex számok és $z\in\mathbb{C}$, akkor

$$\frac{\alpha(z-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta(z-\gamma-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma(z-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1\,.$$

b) Jelölje A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak felezőpontját, R a háromszög köré írt kör sugarát, H a magasságpontját, m_a, m_b, m_c az oldalfelezők hosszát és legyen P egy tetszőleges pont a háromszög síkjában. Igazoljuk, hogy

i) $R\left(a\cdot PA_1+b\cdot PB_1+c\cdot PC_1\right)\geq\dfrac{1}{2}abc$;

ii) $a\cdot m_a\cdot HA+b\cdot m_b\cdot HB+c\cdot m_c\cdot HC\geq\dfrac{3}{2}abc$.

Szász Róbert, Marosvásárhely

4. Az ABC háromszög tetszőleges belső pontján keresztül meghúzzuk az MN, PQ, ST párhuzamosokat a BC, CA, AB oldalakhoz, ahol $M,P\in AB$, $S,Q\in BC$, $N,T\in AC$. Igazoljuk, hogy

$$T\left[ASQ_\Delta\right]+T\left[BNT_\Delta\right]+T\left[CMP_\Delta\right]=T\left[ABC_\Delta\right].$$

Longáver Lajos, Nagybánya

11. osztály

1. Határozzuk meg azokat az $(x_n)_{n\geq 1}$ nemnegatív számokból álló valós számsorozatokat, amelyek teljesítik az $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_n x_{n+1}$ összefüggést, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

2. Számítsuk ki a *BA* mátrix determinánsát, ha $n \in \mathbb{N}^*$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & ... & 2n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & ... & 1 & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n+1 & n+2 & ... & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \text{ valamint}$$

$$B = \begin{pmatrix} (-1)^1 & (-1)^2 & ... & (-1)^n \\ (-2)^1 & (-2)^2 & ... & (-2)^n \\ ... & ... & ... & ... \\ (-2n)^1 & (-2n)^2 & ... & (-2n)^n \end{pmatrix}.$$

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| \neq |b|$ és $A, B \in M_n(R)$ két olyan mátrix, amelyre $a \cdot AB = I_n + b \cdot BA$. Igazoljuk, hogy $\det(AB - BA) = 0$.

Longáver Lajos, Nagybánya

4. Adott a következő sorozat: $a_1 = a \neq 2$, $a_2 = \dfrac{a}{a-2}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 2a_n + 2}, \text{ ha } n \geq 2.$$

Igazoljuk, hogy: $a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + ... + 2^{n-1} a_n = a_1 a_2 ... a_n$, bármely $n \geq 1$ esetén. Vizsgáljuk a sorozat konvergenciáját és határozzuk meg a határértékét. Határozzuk meg a sorozat általános tagját!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

12. osztály

1. Az $f, g : [0,1] \to [0,\infty)$ folytonos függvények esetén

$$\inf_{0\le x\le 1} f(x) = \inf_{0\le x\le 1} g(x)\,.$$

Igazoljuk, hogy létezik $\lambda \in [0,1]$ úgy, hogy

$$f^2(\lambda) + 5f(\lambda) = g^2(\lambda) + 5g(\lambda)\,.$$

Farkas Csaba, Székelykeresztúr

2. Az $f : (1,+\infty) \to (1,+\infty)$ deriválható függvény teljesíti a következő feltételeket:

a) $F(f(x))F(x) = 1$, $\forall\, x \in (1,+\infty)$;

b) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Igazoljuk, hogy bármely $x \in (1,+\infty)$ esetén $f(f(x)) = x$, majd határozzuk meg a f és a F függvényeket.

Szász Róbert, Marosvásárhely

3. Az $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{C})$ mátrixok az $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ egyenlet különböző megoldásai. Igazoljuk, hogy $A^{2007} + B^{2007} + C^{2007} + D^{2007} = 0_2$.

Bencze Mihály, Brassó

4. A $G(a,\alpha) = \left(a^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right)$ halmazon értelmezzük az

$$x * y = \left((x^\alpha - a)(y^\alpha - a) + a\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

műveletet, ahol $a, \alpha > 0$. Igazoljuk, hogy $\left(G(a,\alpha), *\right)$ Abel-féle csoport és $\left(G(a,\alpha), *\right) \cong \left(G(b,\beta), *\right)$, bármely $b, \beta > 0$ esetén.

Bencze Mihály, Brassó

MEGOLDÁSOK – 1. NAP

IX. osztály

1. Alkalmazzuk a számtani és a mértani középarányos közötti egyenlőtlenséget az $1,3,5,\ldots,2n-1$ számokra és figyelembe vesszük, hogy $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

$$n=\frac{n^2}{n}=\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}\geq\sqrt[n]{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\,.$$

Mivel a számok nem mind egyenlők egymással, az egyenlőtlenség szigorú, tehát n -edik hatványra emelés után kapjuk, hogy $n^n>1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

2. A négyzetgyökök értelmezéséből $x\in[a,b]$.

Az $y=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}>0$ kifejezés pontosan akkor maximális vagy minimális, ha y^2 maximális, illetve minimális.

$$y^2=b-a+2\sqrt{(x-a)(b-x)}\geq b-a\,,$$

tehát $y_{\min}=\sqrt{b-a}$, mert ezt az értéket $x=a$ vagy $x=b$ esetén el is éri. Az $(A+B)^2+(A-B)^2=2\left(A^2+B^2\right)$ azonosság felhasználásával írhatjuk, hogy $y^2=2(b-a)-\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}\right)^2$ és ez akkor maximális, ha $\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}\right)^2=0$, azaz ha $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-x}$. Innen következik, hogy $x=\dfrac{a+b}{2}$ esetén éri el a maximumát és $y_{\max}=\sqrt{2(b-a)}$.

3. Ha $n=1$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. A továbbiakban a matematikai indukció módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy igaz n -re és igazoljuk $(n+1)$ -re.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(3k^2-3k+1\right)x_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-3k+1\right)x_k^3\right)+\left(3(n+1)^2-3(n+1)+1\right)x_{n+1}^3\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^3+\left(3n^2+3n+1\right)x_{n+1}^3\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right)^3-3x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-3x_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)-x_{n+1}^3+\left(3n^2+3n+1\right)x_{n+1}^3\leq$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^3 + \left(3n^2 + 3n + 1\right)x_{n+1}^3 - 3n^2 x_{n+1}^3 - 3nx_{n+1}^3 - x_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_n\right)^3.$$

Az utolsó becslésnél felhasználtuk, hogy $\sum_{k=1}^{n} x_k \ge nx_{n+1}$. A matematikai indukció elve alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz bármely $n \ge 1$ esetén.

4. Jelöljük n_1, n_2, …, n_k-val az asztaloknál levő helyek számát. Ha az n_1, n_2, …, n_k legkisebb közös többszöröse N, akkor N perc után minden asztalnál ismét az eredeti sorrendben ülnek, tehát kezdődhet a tánc. Természetesen előfordulhat, hogy ez a szám annyira nagy, hogy ennyi helycsere gyakorlatilag kivitelezhetetlen.

5. a) Legyen p az n legkisebb prímosztója. Az $a = p - 1$ és $b = p + 1$ számok n-nél kisebbek, és n-el relatív prímek valamint egymást követő páros számok.

b) A feladat feltételei mellett $n = p_1^{l_1} p_2^{l_1} \dots p_h^{l_h}$ alakba írható ($2 < p_1 < p_2 < \dots < p_h$). Legyen $a = p_1$ és $b = p_2 \dots p_h$. Mivel a és b relatív prímek, következik, hogy létezik $c, d \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $ca + db = 1$, és $|ca| < n$.

1.eset: Ha c pozitív, akkor $b \,|\, ca - 1 \Rightarrow (b, ca - 2) = 1$ és $(b, ca + 1) = 1$. Természetesen $(a, ca + 1) = 1$ és $(a, ca - 2) = 1$. Ezek után egyszerű belátni, hogy $ca - 2$ és $ca + 1$ két egymást követő n-nél kisebb és n-nel relatív prím.

2.eset: Ha c negatív, akkor $b \,|\, -ca + 1 \Rightarrow (b, -ca + 2) = 1$ és $(b, -ca - 1) = 1$. Természetesen $(a, -ca - 1) = 1$ és $(a, -ca + 2) = 1$. Ezek után egyszerű belátni, hogy $-ca + 2$ és $-ca - 1$ két egymást követő n-nél kisebb és n-nel relatív prím.

6. Nyilván ha valamelyik halmaz üres, akkor a másikban sem lehet egy elem sem, de $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}, n \ge 1$ miatt ez lehetetlen. Tehát egyik halmaz sem üres, és így $n \ge 2$.

Az $A = \{x + y \mid xy \in B, x, y \in \mathrm{N}^*\}$ feltételt úgy tudjuk átírni, hogy az A csakis olyan elemeket tartalmaz, amelyek felírhatók $x + y$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{N}^*$ és $xy \in B$, és minden ilyen típusú elemet tartalmaz. Hasonlóan átírhatjuk a másik feltételt is.

Ha $n = 2$, akkor az $A = \{2\}, B = \{1\}$ halmazok megfelelnek, mivel $2 = 1 + 1, 1 \cdot 1 = 1 \in B$ és $1 = 1 \cdot 1, 1 + 1 = 2 \in A$.

Ha $n = 3$, az 1 nem lehet A-ban, mivel ekkor $1 = x + y, x, y \in \mathbb{N}^*$ kellene, ami lehetetlen ($x, y \geq 1$). Tehát $1 \in B$, így mivel $1 = 1 \cdot 1 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \in A$. Ha $3 \in A$, akkor $3 = 1 + 2 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \in B$ ellentmondás, mert $2 \in A$. Ha $3 \in B$, akkor $3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow 1 + 3 = 4 \in A$ ellentmondás mert $n = 3$. Tehát $n = 3$ esetén nem léteznek ilyen halmazok.

Bebizonyítjuk, hogy $n \geq 4$ esetén sem léteznek megfelelő halmazok. Ha $4 \in A$, akkor $4 = 2 + 2 \in A$ miatt $2 \cdot 2 = 4 \in B$ lehetetlen. Ha $4 \in B$, akkor $4 = 2 \cdot 2 \in B$ miatt $2 + 2 = 4 \in A$ lehetetlen. Tehát a 4 nem lehet benne egyik halmazban sem, így nem létezik megfelelő A és B halmaz.

X. osztály

1. Alkalmazzuk a számtani mértani közepek közti egyenlőtlenséget 2006 darab 1-esre és x^{2008}-ra, illetve y^{2008}-ra.

$$\frac{x^{2008} + y^{2008} + 2006}{2008} \geq \sqrt[2008]{x^{2008} y^{2008}} = |xy| \geq xy.$$

Egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $x^{2008} = y^{2008} = 1$ és x, illetve y azonos előjelűek, tehát csak az $x = y = 1$ illetve $x = y = -1$ megoldások léteznek.

2. A b) feltétel alapján felírhatjuk, hogy $a = b - r$, $c = b + r$, ahol $r > 0$ a haladvány állandó különbsége.

$$n = \overline{abc_x} + \overline{bca_x} + \overline{cab_x} = (a + b + c)\left(x^2 + x + 1\right) = 3b\left(x^2 + x + 1\right).$$

Az $x^2 + x + 1$ összeg csak $5m + 1$, $5m + 2$, $5m + 3$ alakú lehet, azaz nem osztható 5-tel. Ezért n csak akkor osztható 15-tel, ha b osztható 5-tel, és mivel b számjegy, $b = 5$. A számrendszer alapja tehát legalább 7 kell legyen, mert ha $b = 5$ és az a, b, c számok egy szigorúan növekvő számtani haladványt alkotnak, akkor $c \geq 6$. Sorra vesszük az x lehetséges értékeit, és a következő megoldásokat kapjuk:

$$\begin{cases} a=4 \\ b=5 \\ c=6 \\ x=7 \end{cases}, \begin{cases} a=4 \\ b=5 \\ c=6 \\ x=8 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=7 \\ x=8 \end{cases}, \begin{cases} a=4 \\ b=5 \\ c=6 \\ x=9 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=7 \\ x=9 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=8 \\ x=9 \end{cases}.$$

3. Ha $n=1$, akkor $x+y=x-y \Rightarrow y=0$, így $(x,0)$ párok megoldások, $\forall x \in \mathbb{C}$. Ha $n \geq 2$ az első egyenletet n-edik hatványra emelve, a másodikat behelyettesítve majd átrendezve kapjuk, hogy $(x+y)\left[(x+y)^{n^2-1}-1\right]=0$, ahonnan $x+y=0$ vagy $(x+y)^{n^2-1}=1$. Az első esetben $x+y=0$ és $x-y=0$, tehát az $x=y=0$ megoldás adódik. A második esetben $x+y=\cos\frac{2k\pi}{n^2-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n^2-1}$, ahol $k \in \{0,1,2,\ldots,n^2-2\}$. Innen $x-y=\cos\frac{2kn\pi}{n^2-1}+i\sin\frac{2kn\pi}{n^2-1}$, tehát a megoldások

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n^2-1}+\cos\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right)+\frac{i}{2}\left(\sin\frac{2k\pi}{n^2-1}+\sin\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n^2-1}-\cos\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right)+\frac{i}{2}\left(\sin\frac{2k\pi}{n^2-1}-\sin\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right) \end{cases},$$

ahol $k \in \{0,1,2,\ldots,n^2-2\}$.

4. 1. megoldás. Mivel az x^2+xy+y^2 kifejezés a koszinusz tételben szereplő kifejezés, ezért létezik egy olyan háromszög amelynek az oldalai $2,x,y$, hasonlóan létezik olyan háromszög amelynek az oldalai $\sqrt{7},y,z$ és létezik olyan háromszög, amelynek oldalai $\sqrt{3},z,x$. Ezeknek a háromszögeknek az x,y, y,z, illetve z,x oldalai által bezárt szög mértéke 120^0. Ha ezeket a kis háromszögeket összeillesztenénk a megfelelő oldalnál akkor egy olyan háromszöget kapnánk amelynek belsejében van egy olyan pont amelyből minden oldal 120^0 fokos szög alatt látszik, és amelynek oldalai $2,\sqrt{3},\sqrt{7}$. Ez a háromszög derékszögű és a területe $\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. Ugyanakkor a kis háromszögek területének összege a nagy háromszög területe, tehát

$$\sum_{x,y,z}\frac{xy\sin 120^0}{2}=\sum_{x,y,z}\frac{xy}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx).$$

Tehát $\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$ és így $xy+yz+zx=4$.

2. megoldás. Az első egyenlőség mindkét oldalát beszorozzuk $(x-y)$-nal, stb. Azt kapjuk, hogy:

$$x^3-y^3=4x-4y,$$
$$y^3-z^3=7y-7z,$$
$$z^3-x^3=3z-3x.$$

Ha összeadjuk a megfelelő oldalakat azt kapjuk, hogy $z=\frac{x+3y}{4}$. Az első és a harmadik összege egyenlő a másodikkal (a jobb oldal miatt), ahonnan $2x^2+xy+zx=yz$, ide $z=\frac{x+3y}{4}$-t helyettesítve, $3x^2+2xy-y^2=0$ adódik. Ez alapján $y=3x$ (közben használjuk, hogy $x,y>0$, tehát azonos előjelűek), tehát $z=\frac{5x}{2}$ és így $13x^2=4$, vagyis $x>0$ alapján $x=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{6}{\sqrt{13}}$, $z=\frac{5}{\sqrt{13}}$ és innen $xy+yz+zx=4$.

5. Először azt igazoljuk, hogy ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor $PB=PA+PC$.

1. módszer: A *PABC* körbeírt négyszögre felírjuk Ptolemaiosz tételét: $PA\cdot BC+PC\cdot AB=PB\cdot AC$, ahonnan, mivel $AB=BC=CA$, kapjuk, hogy $PB=PA+PC$.

2. *módszer* Meghosszabbítjuk a PC szakaszt a $CD=AP$ szakasszal, úgy hogy $C\in(PD)$. Azt kapjuk, hogy *PD*=*PA*+*PC*, tehát igazolni kell, hogy *PD*=*PB*. Könnyen belátható, hogy a *BAP* háromszög egybevágó a *BCD* háromszöggel, ahonnan következik, hogy *PB*=*BD*. Mivel a *BPD* szög 60°, következik, hogy a PBD háromszög egyenlő oldalú, tehát *PB*=*PD*.

A továbbiakban igazoljuk a kijelentés fordítottját. Mivel $PB=PA+PC$ minden *P*-re az $\overset{\frown}{AC}$ körívről, ezért sajátosan a *P*-t úgy választjuk meg, hogy először az $\overset{\frown}{AC}$ körív felezőpontja legyen, majd a úgy, hogy $PA=2PC$. Mindkét esetben felírva Ptolemaiosz tételét a

PABC négyszögre azt kapjuk, hogy: $PA \cdot BC + PC \cdot AB = AB \cdot AC$, ahonnan egyik esetben következik, hogy $BC + AB = 2AC$, a másik esetben, pedig $2BC + AB = 3AC$. Ezen utóbbi két egyenlőségből következik, hogy *BC*=*AC*. Ha a *P*-t úgy választjuk meg, hogy először az $\overset{\frown}{AC}$ körív felezőpontja legyen, majd úgy, hogy $PC = 2PA$, akkor a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy *AB*=*AC*, tehát a háromszög egyenlő oldalú.

6. Belátjuk, hogy 2^n létszámú szurkolótábor esetén kieszelhető egy stratégia, amely a szurkolótábort szerencséssé teszi.

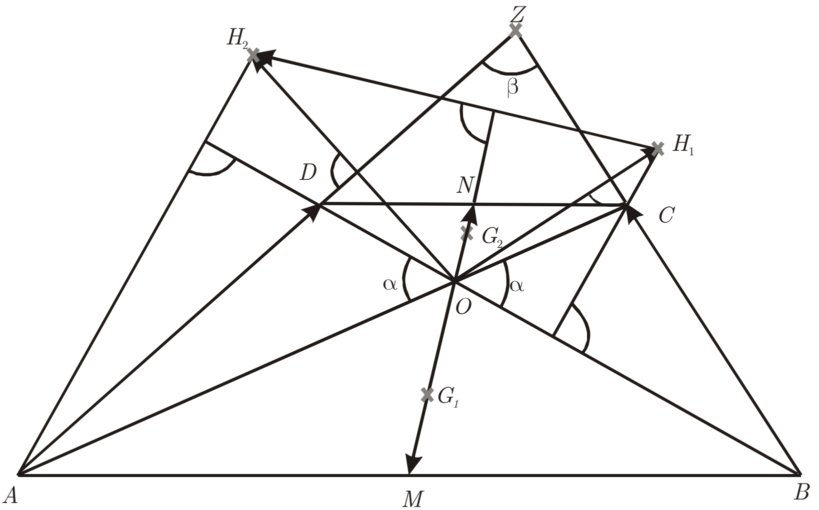
Az első mérkőzés előtt a szurkolótábor vezetője kijelöl 2^{n-1} embert aki megnézheti a mérkőzést, a többi nem mehet el. Így az első mérkőzés után pontosan 2^{n-1} szurkoló reménykedhet abban, hogy szerencsés lesz a idény végén. Ezek közül a szurkolótábor vezetője kijelöl 2^{n-2} embert, aki megnézheti a második mérkőzést, a többi pedig nem mehet el. Ezt a módszert folytatva, az idény végére lesz pontosan egy szerencsés szurkoló.

Belátható, hogy ennél kevesebb szurkoló esetén nem biztosítható hasonló stratégia. Az utolsó mérkőzés előtt léteznie kell legalább 2 „addig" szerencsés szurkolónak. Ellenkező esetben az utolsó mérkőzés kimenetele befolyásolhatja azt, hogy szerencsés lesz-e a szurkolótábor vagy sem. Hasonló meggondolás alapján az utolsó előtti mérkőzés előtt legalább 4 „addig" szerencsés szurkoló szükséges, az azelőtti mérkőzés előtt 8 és általában az első mérkőzés előtt 2^n.

XI-XII. osztály

1. Igazoljuk, hogy a determináns értéke páratlan. Ha a determináns minden elemét helyettesítjük a 2-vel való osztási maradékával, akkor az így kapott determináns paritása megegyezik az eredeti determináns paritásával. Másrészt az így kapott determináns kifejtése, az értelmezés alapján, csak egy nemnulla tagot tartalmaz és az 1 vagy -1. Ez alapján az eredeti determináns páratlan, tehát nem lehet 0.

2.



Mivel G_1 és G_2 rajta van az OM és ON oldalfelezőn és a trapézban M, O, N kollineáris, elég igazolni, hogy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{H_2H_1} = 0$. Ezt a következőképpen alakíthatjuk:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{H_2H_1} = \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2}\right) = 0,$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_1} = 0. \ (1)$$

Mivel $AD \perp OH_2$ és $BC \perp OH_1 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_2} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_1} = 0$, illetve $m\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OH_1}}\right) = m\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OH_2}}\right) = 90° - \beta$ és ha az OBC illetve az ODA háromszögekben felírjuk a BC, OH_1, illetve AD, OH_2 szakaszokat a köré írt kör sugarának függvényében ($AD = 2R_1 \sin\alpha$, $OH_2 = 2R_1 \cos\alpha$, stb.), következik, hogy $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_1} = 0$ azaz teljesül az (1) egyenlőség.

3. A feladat feltételei mellett $n = 2^l p_1^{l_1} p_2^{l_1} \ldots p_h^{l_h}$ alakba írható (p_i különböző páratlan prímek). Az $a = p_1 p_2 \ldots p_h - 2$ és $b = p_1 p_2 \ldots p_h + 2$ számok teljesítik a feltételeket.

4. Az e-edik sor f-edik poharát ha összesen x_{ef}-szer forgatjuk, akkor a pohárforgatások száma $\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} x_{ef}$. Ha a kívánt állapot elérhető, akkor ennek a paritása megegyezik az mn paritásával, mert ez mn darab páratlan szám összege. Másrészt egyszerre ij darab forgatást végzünk, tehát ijv a forgatások száma, ahol v a lépések száma. Eszerint ijv és mn ugyanolyan paritásúak. Ez lehetetlen, ha az m és n páratlan de az i és j közül valamelyik páros. Sőt ha i is és j is páros, de az m és n közül csak az egyik páros, akkor szintén nem lehetséges, mert ebben az esetben minden sorban és minden oszlopban a fordítások száma páros, de ugyanakkor, ha m páratlan, akkor minden oszlopban (és ha n páratlan, akkor minden sorban) páratlan sok forgatást kellene végezni. A továbbiakban igazoljuk, hogy ha i és j páratlan, akkor tetszőleges m, n esetén, ha i páros és j páratlan, akkor páros m-re és tetszőleges n-re, ha j páros és i páratlan, akkor páros n-re és tetszőleges m-re, míg ha i-is és j-is páros, akkor páros m-re és n-re elérhető a kívánt konfiguráció.

Ha i páratlan, akkor minden pohár i-szer fordul meg egy oszlopban, ha rendre kiválasztjuk a k-adik elemtől kezdődően a következő i sort (az utolsó után az első következik). Ha i páros, akkor az első $i-1$ sort mindig választjuk és az utolsó sornak rendre választjuk az i-edik, $(i+1)$-edik, stb., n-edik sort választjuk. Így ismét minden pohár páratlan sokszor fordul meg. Ha ezt a két kiválasztási formát összekombináljuk, mindig elérhető a kívánt állapot.

5. Felhasználjuk, hogy ha n osztja az m-et, akkor az F_n osztja az F_m-et, tehát elégséges igazolni, hogy ha az $\{1,2,...,2n\}$ halmazból kiválasztunk $n+1$ elemet, akkor köztük mindig lesz két olyan szám melyek közül az egyik osztója a másiknak. Ennek érdekében a kiválasztott $n+1$ számot $2^k \cdot p$ alakba írjuk, ahol p páratlan és $p \le 2n-1$. Mivel 1-től $2n$-ig csak n páratlan szám van, ezért a kiválasztott $n+1$ szám közül legalább két számnál a p ugyanaz kell legyen, vagyis van két olyan szám, amelyek $2^k \cdot p$ és $2^l \cdot p$ alakúak, amelyek közül az egyik osztója a másiknak.

6. A mezőket kifestjük sakktáblaszerűen, így két oldalszomszédos mező színe különböző. A fekete mezőn szereplő számok összegéből kivonjuk a fehér mezőn szereplő számok összegét. Ez a különbség nem változik, ha két oldalszomszédos mezőn szereplő számot ugyanazzal a természetes számmal növeljük, vagy csökkentjük.

A csiga is fekete mezőről fehérre, és fehérről feketére lép, így kezdetben a páros számok mind azonos színű mezőkön helyezkednek el, a páratlanok szintén. Tehát a kiinduló különbség $1-2+3-4+\ldots$ $\ldots+99-100=-50$ vagy 50. Ahhoz, hogy minden mezőn ugyanaz a szám szerepeljen, ez a különbség 0 kellene legyen, viszont ez nem lehetséges, mert ez a különbség invariáns.

MEGOLDÁSOK – 2. NAP

IX. osztály

1. Az $n=1$ esetén $x_1=2$. Az $n=2$ esetén $x_1=2$ és $x_2=3$ (vagy fordítva). A továbbiakban a matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy tetszőleges $n\geq 3$ esetén is léteznek olyan természetes számok, amelyek teljesítik az adott egyenlőséget. Ha $n+1$-re is ugyanazokat az $x_1,x_2,...,x_n$ számokat használjuk, akkor az

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1x_2...x_n}=1 \text{ és}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_1x_2...x_{n+1}}=1$$

egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_1x_2...x_nx_{n+1}}=\frac{1}{x_1x_2...x_n}.$$

Ha ebből kifejezzük az x_{n+1}-et, akkor az $x_{n+1}=1+x_1x_2...x_n$ összefüggést kapjuk, tehát ha $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{N}^*$, akkor $x_{n+1}\in\mathbb{N}^*$ és így a matematikai indukció elve alapján következik a feladat állítása.

2. A P ponton keresztül MN, TQ, RS párhuzamosokat húzunk a BC, AC és AB oldalakkal $\left(R,Q\in BC,\, N,S\in AC,\, M,T\in AB\right)$. Az így keletkezett PRQ, PNS, PTM háromszögek az ABC háromszöggel hasonlóak és bennük a PA',PB',PC' szakaszok oldalfelezők. Ezért

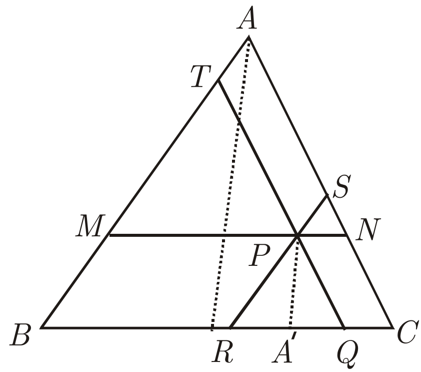
$$2\cdot\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ},\ 2\cdot\overrightarrow{PB'}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PS},\ 2\cdot\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PM}.$$

$$2\cdot\left(\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}\right)=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PM}\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}\right)=\left(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PM}\right)+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PN}\right)+\left(\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PS}\right)\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}\right)=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=3\cdot\overrightarrow{PG},$$

ahonnan következik a kért összefüggés.



3. Először kiszámítjuk az $S_n = \left\{\frac{2}{3}\right\} + \left\{\frac{2^2}{3}\right\} + ... + \left\{\frac{2^n}{3}\right\}$ összeget.

Ha $k \in \mathbb{N}^*$ és k páros, akkor

$$\frac{2^k}{3} = \frac{2^{2m}}{3} = \frac{4^m - 1 + 1}{3} = 4^{m-1} + 4^{m-2} + \cdots + 1 + \frac{1}{3}, \text{ tehát } \left\{\frac{2^k}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Ha k páratlan, akkor

$$\begin{aligned}\frac{2^k}{3} = \frac{2^{2m+1}}{3} = 2\frac{2^{2m}}{3} = 2\frac{4^m}{3} = 2\left(4^{m-1} + 4^{m-2} + ... + 1 + \frac{1}{3}\right) = \\ = 2\left(4^{m-1} + 4^{m-2} + ... + 1\right) + \frac{2}{3}\end{aligned},$$

tehát $\left\{\frac{2^k}{3}\right\} = \frac{2}{3}$. Ezek alapján $S_n = \frac{n}{2}$, ha n páros és $S_n = \frac{3n+1}{6}$, ha n páratlan. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunjakowski egyenlőtlenséget a $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, …, $\sqrt{a_n}$, illetve $\sqrt{\left\{\frac{2}{3}\right\}}$, $\sqrt{\left\{\frac{2^2}{3}\right\}}$,…, $\sqrt{\left\{\frac{2^n}{3}\right\}}$ számokra (és használjuk azt, hogy n páros):

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1\left\{\frac{2}{3}\right\}} + \sqrt{a_2\left\{\frac{2^2}{3}\right\}} + ... + \sqrt{a_n\left\{\frac{2^n}{3}\right\}} \le \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}\sqrt{S_n} = \\ = \sqrt{\frac{n}{2} + 2\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{n\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

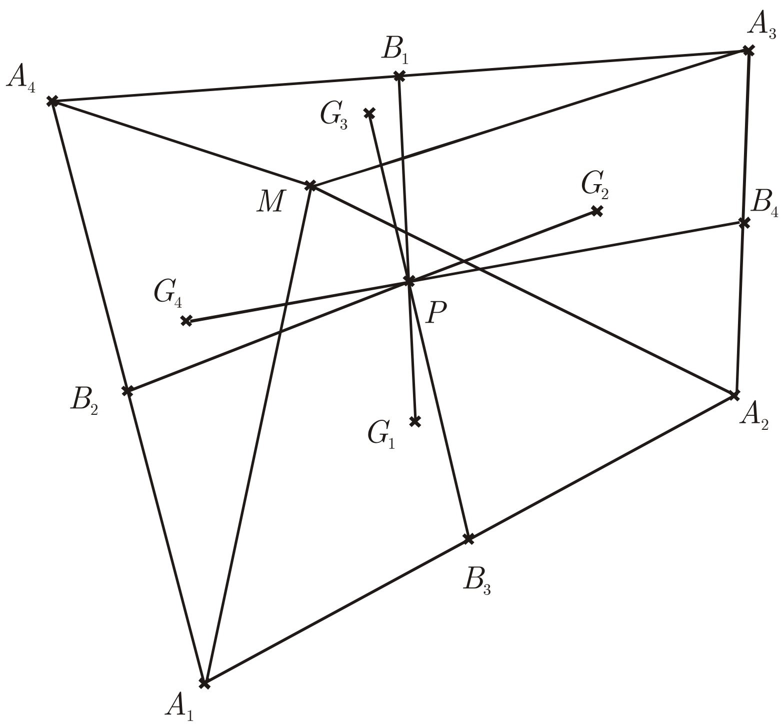
4. A B_1G_1 és B_3G_3 metszéspontját jelöljük P-vel. A $B_1B_3G_1G_3$ négyszög trapéz és az MB_1B_3 háromszögben $\frac{MG_3}{MB_1} = \frac{2}{3}$, tehát $\frac{G_1P}{PB_1} = \frac{G_1G_3}{B_1B_3} = \frac{2}{3}$. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{MP} = \frac{3 \cdot \overrightarrow{MG_1} + 2 \cdot \overrightarrow{MB_1}}{5} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{MB_3} + 2 \cdot \overrightarrow{MB_1}}{5} = \frac{\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4}}{5}.$$

Hasonlóan a B_2G_2 és B_4G_4 szakaszok P' metszéspontjára is teljesül az

$$\overrightarrow{MP'} = \frac{\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4}}{5}$$

összefüggés, tehát a négy szakasz összefutó.



X. osztály

1. Mivel g szürjektív, létezik olyan $y_0 \in \mathbb{R}$, amelyre $g(y_0) = 1$. A feltétel alapján $f(g(xy_0)) = f(x)$.
Az f injektivitása alapján következik, hogy $g(xy_0) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Az y_0 nem lehet 0 és így $g(u) = \frac{1}{y_0}u$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Ha ezt visszahelyettesítjük az adott feltételbe, akkor az $f(axy) = ayf(x)$ egyenlőséghez jutunk, ahol $a = \frac{1}{y_0}$. Az $x = \frac{1}{a}$ értékre következik, hogy $f(y) = af\left(\frac{1}{a}\right)y$, $\forall y \in \mathbb{R}$, tehát az $af\left(\frac{1}{a}\right) = b$ jelöléssel $f(x) = bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Látható, hogy ezek a függvények teljesítik a megadott összefüggést.

2. Vegyük észre, hogy $x = 2$ megoldása az egyenletnek. Bebizonyítjuk, hogy más megoldása nincs. Az értelmezési tartomány $\left(\sqrt[10]{24}, +\infty\right)$. Ha $\sqrt[10]{24} < x < 2$, akkor az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív. Ha $x > 2$, akkor az egyenlet bal oldala pozitív, a jobb oldala negatív.

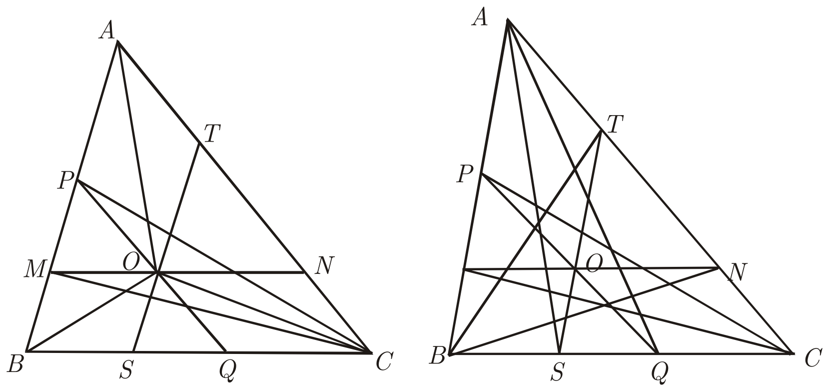
3. Az a) alpontot számolással ellenőrizzük. A továbbiakban tekintsük az ABC háromszög köré írt kör középpontját origónak és legyen α, β és γ az A, B és C csúcs affixuma valamint z a P pont affixuma. Ha A_1, B_1 és C_1 az oldalak felezőpontjai, akkor $PA_1 = \left|z - \frac{\gamma+\beta}{2}\right|$, $PB_1 = \left|z - \frac{\alpha+\gamma}{2}\right|$ és $PC_1 = \left|z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right|$. Így $R = |\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ és $a = |\beta - \gamma|$, $b = |\gamma - \alpha|$, illetve $c = |\alpha - \beta|$. Az a) alpontban igazolt összefüggésbe helyettesítsünk z helyett $2z$-t. Világos, hogy az azonosság alapján írhatjuk, hogy

$$\left|\frac{\alpha(2z-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right| + \left|\frac{\beta(2z-\gamma-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}\right| + \left|\frac{\gamma(2z-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right| \geq 1$$

és ez épp a bizonyítandó egyenlőtlenség.

A második egyenlőtlenség igazolása hasonló, csak origónak a háromszög magasságpontját tekintjük és P -t a súlypontnak választjuk.

4. Jelölje T az ABC háromszög területét.



$$T[CMP] = T - T[ACP_\Delta] - T[BCM_\Delta] = T - T[ACO_\Delta] - T[BOC_\Delta] \Rightarrow$$
$$T[CMP_\Delta] = T[AOB_\Delta].$$

Hasonlóképp

$$T[BNT_\Delta] = T[AOC_\Delta];$$
$$T[ASQ_\Delta] = T[BOC_\Delta].$$
$$T[ASQ_\Delta] + T[BNT_\Delta] + T[CMP_\Delta] = T[AOB_\Delta] + T[AOC_\Delta] + T[BOC_\Delta] = T.$$

XI. osztály

1. Felírva a megadott összefüggést (n+1)-re is és abból kivonva az n -re megadott összefüggést azt kapjuk, hogy $x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n+2} - x_{n+1}x_n, \forall n \geq 1$, vagyis, hogy $x_{n+1}(x_{n+1} - x_{n+2} + x_n) = 0, \forall n \geq 1$, ahonnan következik, hogy bármely $n \geq 1$ esetén $x_{n+1} = 0$ vagy $x_{n+1} - x_{n+2} + x_n = 0$.

Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}^*$, amelyre $x_{n_0} = 0$, akkor, mivel $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n_0}^2 = x_{n_0}x_{n_0+1}$, következik, hogy $x_1 = x_2 = ... = x_{n_0} = 0$. Tehát ha a sorozatnak minden határon túl van 0-ás tagja, akkor minden tagja 0, ami teljesíti is a feladatban megadott feltételt.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a sorozatnak nem minden tagja 0. Ebben az esetben létezik olyan n_0 természetes szám úgy, hogy a sorozat tagjai az n_0-adik tagig mind nullák, és attól kezdve egy tagja sem nulla. Legyen a a sorozat első nullától különböző tagja. Könnyen belátható, hogy a következő tagok a, $2a$, $3a$, $5a$, $8a$, …, $F_k a$,…, ahol F_k a *Fibonacci*-sorozat *k*-adik tagja.

Tehát a megadott feltételt csak a 0, 0, …, 0, a, a, $2a$, $3a$, $5a$, $8a$, …, $F_k a$,… alakú sorozatok teljesítik.

2. Mivel a B mátrix $(2n, n)$ típusú, az A pedig $(n, 2n)$ típusú, a BA szorzat $(2n, 2n)$ típusú lesz. Az A és a B mátrixok rangja legfeljebb n lehet, a szorzat rangja viszont nem lehet nagyobb a tényezők rangjának minimumánál, tehát a *BA* rangja is legfeljebb n lehet. Ez azt jelenti, hogy a $(2n, 2n)$ típusú BA mátrix determinánsa nulla.

3. $a \cdot AB = I_n + b \cdot BA \Leftrightarrow a \cdot (AB - BA) = I_n + (b - a) \cdot BA$.

$a \cdot AB = I_n + b \cdot BA \Leftrightarrow b \cdot (AB - BA) = I_n + (b - a) \cdot AB$.

Tudjuk, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ esetén igaz a következő összefüggés:

$$\det(I_n + \lambda \cdot AB) = \det(I_n + \lambda \cdot BA).$$

Ez alapján

$$\det[I_n + (b - a) \cdot BA] = \det[I_n + (b - a) \cdot AB]$$

tehát

$$\det(a \cdot (AB - BA)) = \det(b \cdot (AB - BA)), \text{ vagyis}$$

$$a^n \cdot \det(AB - BA) = b^n \cdot \det(AB - BA), \text{ ahonnan}$$

$$(a^n - b^n) \cdot \det(AB - BA) = 0 \text{ és így } \det(AB - BA) = 0.$$

4. Az $a = 0$ esetén a sorozat minden tagja 0, a sorozat állandó, konvergens és határértéke 0. Az $a = 4$ esetén a sorozat: $4, 2, 2, ..., 2, ...$, ez szintén állandó sorozat a második tagtól kezdve, tehát konvergens és határértéke 2. Mindkét sorozatra teljesül a vizsgált egyenlőség.
Legyen $a \neq 2$ és $a \neq 0$. Az $n = 1$ esetén az egyenlőség nyilvánvaló. Az $n = 2$ esetén $a_1 + 2a_2 = a + \dfrac{2a}{a-2} = \dfrac{a^2}{a-2} = a_1 a_2$.

$n \geq 2$ esetén a rekurzív összefüggés $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - 2(a_n - 1)}$ alakba írható.

Ez felírható

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$$

alakba, ahonnan egyrészt

$$a_n = 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n - 1}{a_{n+1} - 1},$$

másrészt

$$a_n = 2\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} - \frac{a_n}{a_n - 1}.$$

Ezeket az összefüggéseket felírjuk $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, …stb. értékekre, majd az első esetben összeszorozzuk, második esetben, szorozva rendre a 2, 2^2, 2^3, stb. tényezőkkel, összeadjuk, és mindkét esetben figyelembe vesszük azt, hogy $a_1 = \dfrac{2a_2}{a_2 - 1}$. Így egyrészt az

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 2^n \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1}$$

másrészt az $a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \ldots + 2^{n-1} a_n = 2^n \dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1}$

összefüggéseket kapjuk.

Tehát $a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \ldots + 2^{n-1} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Vizsgáljuk most a sorozat konvergenciáját és határozzuk meg a határértékét.

A rekurzív összefüggés alapján $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - 2a_n + 2} \geq 0$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat alulról korlátos. Másrészt $a_{n+1} - 2 = \dfrac{-(a_n - 2)^2}{a_n^2 - 2a_n + 2} \leq 0$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat felülről is korlátos. Tehát a sorozat korlátos.

Továbbá $a_{n+1} - 1 = \dfrac{2(a_n - 1)}{a_n^2 - 2a_n + 2}$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat harmadik tagjától kezdve minden tagja nagyobb mint 1, vagy minden tagja kisebb mint 1 ($a_2 \neq 1$ és $a_n \neq 1$, ha $n \geq 2$).

Végül $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-a_n(a_n - 1)(a_n - 2)}{a_n^2 - 2a_n + 2}$, $n \geq 2$, alapján következtethetünk a sorozat monotonitására.

Ha $a_1 = a < 0$, akkor $a_2 = \dfrac{a}{a-2} > 0$ és $a_2 < 1$, tehát $a_n < 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. A sorozat korlátos és a második tagtól kezdve szigorúan csökkenő, tehát konvergens.

Ha $a_1 = a \in (0,2)$, akkor $a_2 = \dfrac{a}{a-2} < 0$, de $0 < a_3 < 1$ és így $a_n < 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. A sorozat korlátos és a harmadik tagtól kezdve szigorúan csökkenő, tehát konvergens.

Ha $a_1 = a > 2$, akkor $a_2 = \dfrac{a}{a-2} > 1$, de $1 < a_3 < 2$ és így $a_n > 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. A sorozat korlátos és a harmadik tagtól kezdve szigorúan növekvő, tehát konvergens.

Ha x a sorozat határértéke, akkor a rekurzív összefüggésben határértékre térve kapjuk az $x = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ egyenletet, ami ekvivalens az $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ egyenlettel. A megoldások 0, 1 és 2. Figyelembe véve a sorozat monotonitását, kapjuk, hogy a sorozat határértéke csak 0 vagy 2 lehet. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a < 2 \\ 2, & \text{ha} \quad a > 2 \end{cases}$.

A sorozat általános tagjának a meghatározására a megadott rekurzív összefüggés mindkét oldalának vesszük a reciprokát:

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{2}{a_n} + \frac{2}{a_n^2},\ n \geq 2.$$

$a \neq 0$ és $a \neq 2$ esetén szorzunk 2-vel és teljes négyzetet alakítunk ki:

$$\frac{2}{a_{n+1}} - 1 = \left(\frac{2}{a_n} - 1\right)^2.$$

Az előbbi összefüggés alapján következik, hogy $\dfrac{2}{a_n} - 1 = \left(\dfrac{2}{a_1} - 1\right)^{2^{n-1}}$ és így

$$a_n = \frac{2 \cdot a^{2^{n-2}}}{a^{2^{n-2}} + (a-4)^{2^{n-2}}},\ n \geq 2.$$

XII. osztály

1. Ha rendezzük a bizonyítandó egyenlőséget, akkor az

$$[f(\lambda)-g(\lambda)][f(\lambda)+g(\lambda)+5]=0$$

egyenlőséghez jutunk. Láthatjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha létezik, olyan $\lambda \in [0,1]$, amelyre $f(\lambda)=g(\lambda)$.

Jelöljük a fenti infimumok közös értékét m-el. A Weierstrass tétel alapján léteznek $\alpha,\beta \in [0,1]$ úgy, hogy $f(\alpha)=g(\beta)=m$. Legyen a továbbiakban $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Látható, hogy a h függvény folytonos az értelmezési tartományán. A fentiek alapján, $h(\alpha)=m-g(\alpha)\le 0$ (mert a g infimuma m), hasonlóan $h(\beta)=f(\beta)-m\ge 0$. Ha $\alpha=\beta$, akkor megtaláltuk a keresett értéket, ellenkező esetben az általánosság leszűkítése nélkül feltehetjük, hogy $\alpha<\beta$. Ekkor a fentiek alapján létezik $\lambda\in[0,1]$ úgy, hogy $h(\lambda)=0$, vagyis $f(\lambda)=g(\lambda)$.

2. Első lépésben vegyük észre, hogy az adott egyenlőségbe x helyére $f(x)$ helyettesíthető és az következik, hogy

$$F(f(f(x)))F(f(x))=1,\ \forall\, x\in(1,+\infty).$$

Ezt egybevetve az a) egyenlőséggel azt kapjuk, hogy

$$F(f(f(x)))=F(x),\ \forall\, x\in(1,+\infty).$$

Mivel $F'(x)=f(x)>0$, $\forall\, x\in(1,+\infty)$, következik, hogy F injektív és így az előbbi összefüggés alapján

$$f(f(x))=x,\ \forall\, x\in(1,+\infty).$$

Második lépésben deriváljuk az adott egyenlőség mindkét oldalát:

$$f(f(x))f'(x)F(x)+f(x)F(f(x))=0,\ \forall\, x\in(1,+\infty),$$

tehát

$$xf'(x)F(x)+\frac{f(x)}{F(x)}=0,\ \forall\, x\in(1,+\infty),$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$xf'(x)+\frac{f(x)}{F^2(x)}=0,\ \forall\, x\in(1,+\infty).$$

Ezt integrálva következik, hogy

$$xf(x) - F(x) = \frac{1}{F(x)} + c\ ,\ \forall\, x \in (1, +\infty)\ .$$

Mivel $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, az a) feltétel alapján $F(\sqrt{2}) = 1$ és így az előző egyenlőségben $c = 0$, tehát

$$\frac{f(x)}{F(x) + \dfrac{1}{F(x)}} = \frac{1}{x}\ ,\ \forall\, x \in (1, +\infty)\ .$$

Ha ezt integráljuk, akkor a $\ln\sqrt{F^2(x)+1} = \ln x + c_1$ összefüggést kapjuk,

tehát $F(\sqrt{2}) = 1$ alapján $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ és $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\forall x \in (1, +\infty)$.

3. Az adott egyenlőség alapján $\det X^2 = (\det X)^2 = 49$,
tehát $\det X \in \{-7, 7\}$.

Ha $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, akkor $X^2 - (a+d)X + \det X \cdot I_2 = 0_2$, tehát

$$(a+d)X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix},$$

ha $\det X = 7$ és

$$(a+d)X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

ha $\det X = -7$. Az első esetben $(a+d)^2 = 25$ a másodikban $(a+d)^2 = -3$, tehát az egyenlet megoldásai $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ és $-i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Ezeknek az összege 0_2. Másrészt

$$A^{2007} + B^{2007} + C^{2007} + D^{2007} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{1003} (A + B + C + D) = 0_2\ .$$

4. A $*$ művelet értelmezése alapján látható, hogy

$$(x * y)^{\alpha} - a = (x^{\alpha} - a)(y^{\alpha} - a),$$

tehát az $f_{a,\alpha} : G(a,\alpha) \to \mathbb{R}$, $f_{a,\alpha}(x) = x^{\alpha} - a$ függvény művelettartó. $\mathrm{Im}\, f_{a,\alpha} = (0,\infty)$, tehát az $f_{a,\alpha}^{-1} : (0,\infty) \to G(a,\alpha)$ függvény bijektív és művelettartó a $((0,\infty),\cdot)$ és $(G(a,\alpha),*)$ struktúrák közt. Mivel az első Abel-csoport, a második is az és izomorfak. Ez alapján $(G(a,\alpha),*)$ és $(G(b,\beta),*)$ közti izomorfizmus $f_{a,\alpha} \circ f_{b,\beta}^{-1}$.

Mi lett volna, ha ezt adjuk???
(Kimaradt csemegék)

IX. osztály

1. Igazoljuk, hogy

$$\min\left(\max_{xy+yz+zx=1}\left(x^2+yz, y^2+zx, z^2+xy\right)\right)=\frac{2}{3}.$$

Mi történik ha a minimum és a maximum sorrendjét megcseréljük?

András Szilárd, Kolozsvár

2. Határozzuk meg az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatot, ha

$$x_n+x_k+x_{n+k}=n^2+nk+k^2\text{, minden } n,k\in\mathbb{N}^* \text{ esetén!}$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

3. Az $x,y,z>0$ valós számokra $xyz=1$. Határozzuk meg az

$$E=\frac{(2x+y)^2}{x}+\frac{(2y+z)^2}{y}+\frac{(2z+x)^2}{z}$$

kifejezés legkisebb értékét!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Tetszőleges pozitív egész *m*-re legyen *s*(*m*) az *m* számjegyeinek összege. Határozzuk meg az összes *n* pozitív egész számot, amelynek egyetlen számjegye sem nulla és teljesíti az

$$s\left(n^2\right)=2^{s(n)}$$

összefüggést.

Dobribán Edgár, Kolozsvár

5. Ha $x_1, x_2, ..., x_n\in(0,\infty)$, bizonyítsuk be, hogy:

$$n\cdot x_1+(n-1)\cdot x_2+...+2\cdot x_{n-1}+x_n+$$
$$+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1\cdot x_2}+...+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}\geq\frac{n\cdot(n+3)}{2}$$

Mikor kapunk egyenlőséget?

Longáver Lajos, Nagybánya

X. osztály

1. Legyen $z \in \mathbb{C}^*$ és $a = \dfrac{|z+1|-|z-1|}{|z+1|+|z-1|}$. Bizonyítsuk be, hogy:

$$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z-a| \leq |z| .$$

Longáver Lajos, Nagybánya

2. Az $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ növekvő függvény a következő tulajdonságokkal alapján értelmezzük:

a) $f(1) = 1$;

b) $f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 2$ és $f(6) = f(7) = f(8) = = f(9) = 3$;

c) a következő három érték ($4,5,6$) mindegyikét a függvény pontosan 9 pontban veszi fel (tehát $f(k) = 4$, ha $10 \leq k \leq 18$, $f(k) = 5$, ha $19 \leq k \leq 27$ és $f(k) = 6$, ha $28 \leq k \leq 36$);

d) az előbbi lépést ismételjük, vagyis a következő 4 érték mindegyikét $4^2 = 16$-szor veszi fel, az utána következő 5 érték mindegyikét 25-ször és általában, ha már a $(k-1)$-edik tömböt megszerkesztettük, akkor a következő k érték mindegyikét pontosan k^2-szer veszi fel.

Igazoljuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f(x) = \left\lceil \frac{x}{(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{2} \right\rceil,$$

ahol $n = \left\lceil \sqrt{2\sqrt{x} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil$ és $\lceil y \rceil$ az y valós szám felső egészrésze, vagyis $\lceil y \rceil = k$ akkor és csakis akkor, ha $k - 1 < y \leq k$.

András Szilárd, Kolozsvár

3. Az $ABCD$ húrnégyszögben a szemben fekvő élpárok nem párhuzamosak, O az átlók metszéspontja, E az $[AB]$ oldal felezőpontja és $OE \perp CD$. Igazoljuk, hogy $AC \perp BD$.

Tamási Csaba, Csíkszereda

4. Legyen V egy n oldalú konvex négyszög.

a) Feltételezzük, hogy n osztható 3-mal. Bizonyítsuk be, hogy V triangularizálható úgy, hogy a V összes csúcsa páratlan számú háromszögben szerepeljen.

b) Ha n nem osztható 3-mal akkor létezik olyan triangularizálás, amelyben pontosan két csúcs szerepel páros számú háromszögben.
(Megjegyzés. Triangularizálás azt jelenti, hogy V-t az átlói mentén háromszögekre vágjuk szét.)

5. Igazoljuk, hogy ha n egy 3-nál nagyobb vagy egyenlő páratlan szám, akkor nem léteznek olyan $x_1,...,x_n$ természetes számok, amelyekre az $x_1^2+x_2+2x_1x_2\cdots x_n$, $x_2^2+x_3+2x_1x_2\cdots x_n$, ..., $x_n^2+x_1+2x_1x_2\cdots x_n$ számok mind prímek.

Demeter Albert, Kolozsvár

XI. osztály

1. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$, egy pozitív tagokból álló sorozat, amelynek tagjaira $a_1=0$ és

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+...+\frac{1}{a_n+a_{n+1}},\quad \forall n\in\mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(a_{n+1}-a_n\right)$ határértéket!

Longáver Lajos, Nagybánya

2. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB=n\cdot a$, $AD=2\cdot a$ és $m\left(\widehat{BAD}\right)=60^\circ$. Az $XYZT$ egyenlőszárú trapézban $XY=YZ=ZX=a$ és $XT=2\cdot a$. Hány különböző módon fedhető le az $ABCD$ parallelogramma az $XYZT$-vel kongruens trapézokkal (lefödés alatt azt értjük, hogy a trapézok teljesen lefödik a paralelogrammát anélkül, hogy köztük átfedés lenne vagy a paralelogrammán kívüli tartománnyal közös pontjuk lenne)?

András Szilárd, Kolozsvár

3. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+3^2}+\frac{2^2}{1+3^{2^2}}+\ ...\ +\frac{2^n}{1+3^{2^n}}\right)$ határértéket!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Az $x_1 = (a_1^1, ..., a_n^1)$ természetes számokból álló számsor legkisebb elemét kicseréljük a többiek számtani közepének egész részével (a többit változatlanul hagyjuk), így az $x_2 = (a_1^2, ..., a_n^2)$ számsort kapjuk. Ezen eljárást folytatva megszerkesztjük az $x_i = (a_1^i, ..., a_n^i)$, $i \geq 2$ számsorokat. Jelölje s_i az x_i elemeinek összegét. Igazoljuk, hogy létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $s_k = s_{k+1} = s_{k+2} = ...$

Demeter Albert, Kolozsvár

5. Adottak $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ és $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Számítsuk ki $Tr((AB - BA)^3)$-et, ha $CA = AC$ vagy $CB = BC$ és $n(AB + 2BA) + C = (3n-1)BA$ ($Tr(A)$ a főátlón levő elemek összege).

Farkas Csaba, Székelykeresztúr

XII. osztály

1. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az $n \in \mathbb{N}^*$ szám esetén teljesíti az $f(x) + f(nf(x)) = \dfrac{x}{n}$ összefüggést minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Igazoljuk, hogy: **a)** f szigorúan monoton;

b) $f(0) = 0$;

c) $f(1) + f(2) + ... + f(n) < \dfrac{n+1}{2}$.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ valós számok teljesítik a következő feltételeket:

a) $\dfrac{a}{2007} + \dfrac{b}{2006} + \dfrac{c}{2005} + \dfrac{d}{2004} = 0$;

b) $b^2 < 3ac$.

Igazoljuk, hogy $a(a + b + c + d) > 0$.

Szász Róbert, Marosvásárhely

3. Határozzuk meg azokat a folytonos függvényeket, amelyek teljesítik a következő feltételt: $f\left(x^2\right) = f(x)\dfrac{1}{x^2 - x + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

Szász Róbert, Marosvásárhely

4. a) Létezik-e $n \geq 3$ természetes szám amelyre a $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoidnak páratlan számú egysége legyen.

b) Számítsd ki a $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, $n \geq 3$ monoid egységeinek a $(\mathbb{Z}_n, +)$ -beli összegét.

Longáver Lajos, Nagybánya

5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza n egység. Hány különböző módon lehet lefödni egységnyi oldalhosszúságú rombuszokkal, amelyekben a szögek mértéke 60° illetve 120° (a rombuszoknak három lehetséges állása létezik aszerint, hogy az oldalaik a hatszög melyik két szomszédos oldalával párhuzamosak).

András Szilárd, Kolozsvár

A résztvevő diákok névsora

Ady Endre Elméleti Gimnázium, Nagyvárad

Lőrincz András	12	Nagy Aliz	12

Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár

Takács Emese	9		

Áprily Lajos Főgimnázium

Borbáth Áron	10	Sipos Erwin	9
Borbáth Tamás	10	Szász Zsigmond	10
Jakab Szilárd	9	Székely Timea	10
Nagy Ferenc Zsolt	9	Todor Nits Tamara	9

Baróti Szabó Dávid Középiskola– Barót

Akácsos Tibor	10	Komporály Laura	9
Bedő Zsolt-Zoltán	12	Kovács Géza-Tamás	11

Bartók Béla Líceum – Temesvár

Nemes Kinga	9	Tóth Miklós	10
Ördög Dorottya	11		

Báthory István Elméleti Líceum – Kolozsvár

András Lóránd	12	Kalló Jankucz Anna	11
Bene Loránt	12	Kovács Zoltán	9
Brudasca Renáta	9	Simon Vivien	12
Dobribán Edgár	11	Szenkovits Annamária	11
Furdek Bálint	9	Tárkányi Ildikó	10
Guttmann Emese	12	Visky Mária	10

Bolyai Farkas Líceum – Marosvásárhely

Bajnóczi Tamás	10	Mészáros Alpár	12
Bakos Katinka	10	Patka Csongor	11
Kántor Lajos	11	Simonfi István	9
Kardos Andor	10	Terkál Róbert	11
Károly Réka	10	Török Tamás	9
Konnerth Raimund	9	Toth Helga	11
Máthé Botond	12	Zajzon Barna	9
Máthé Koppány	12		

Csíky Gergely Líceum – Arad

Boros Zoltán	9	Czobor Ádám	11
Bugyi Noémi	11	Hadnagy Kinga	9
Czeglédi Éva	10	Szőke Andrea	11

Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn – Szatmárnémeti

Barabás Szabolcs	11	Maksay Dorottya	10
Baumgártner Mónika	11	Nikora Nárcisz	10
Bodor Zoltán	9	Polcz Péter	9
Ferencz Endre	11	Simon Erika	9
Ilonczai Zsolt	10	Suba Nándor	11
Kis Alpár	11		

Leöwey Klára Líceum – Máramarossziget

Melega Rolf	10	Padrah István	10

Márton Áron Gimnázium – Csíkszereda

Antal Ágota	12	Hodgyai Zoltán	10
Bán Orsolya	11	Illyés Ágota	10
Bedő Anita	9	János Csongor	9
Bodó Emőke	9	Kolcza Tünde	9
Burus Ákos	10	Kovács Hunor	12
Buslig Szabolcs	9	Lukács István-Paul	9
Csutak Katalin	10	Nagy Tímea	10
Dénes Péter	12	Rangyák Eszter	10
Dorner Boglárka	11	Sükösd Endre	12
Fecske Nándor	11	Szőke Katalin	9
Ferencz-Hanke Réka	9	Varga Bernadette	12
Fülöp Annamária	9		

Mikes Kelemen Gimnázium– Sepsiszentgyörgy

Szörcsey Ágnes	10

Nagy Mózes Elméleti Líceum – Kézdivásárhely

Bartha Zalán	12	Szabó Ágnes	9
Kész Borbála	12	Szabó Tibor Botond	10
Kovács Béla	11	Szőcs Csongor	9
Lestyán Erika	10	Zölde Attila	12

Nagyszalontai Elméleti Liceum – Nagyszalonta

Barta Levente	12

Németh László Líceum– Nagybánya

Kovács Emese	9	Várady Emese	9
Kovács Tünde	11		

O.Goga Elméleti Liceum – Margitta

Györfi Tamás	12

Orbán Balázs Gimnázium – Székelykeresztúr

Bíró Lehel	11	Győri Szabolcs	12
Elekes István	12	Hevele István	9
Farkas Ágnes	9	Mátyás Helga	10
Fazakas Mária	10	Sándor Bulcsú	11

Salamon Ernő Gimnázium – Gyergyószentmiklós

Bíró Csongor	11	Kolcsár Árpád	11
Erőss Lóránd	11	Kolcsár Kálmán Imre	10
György Levente	9	Kovács Zsolt Péter	10
Kecseti Hunor	9		

Székely Mikó Kollégium – Sepsiszentgyörgy

Farkas Dalma	12	Köllő Ágnes	11
Fekete Balázs	12	Réti Zenkő Zsuzsanna	11
Kakas Kincső	9	Rill Róbert Adrian	11
Kertész Lóránd Tamás	11	Sasu Róbert	9
Kilyén Attila Örs	10	Simon Levente	10
Kisfaludi Bak Zoltán	11	Szenkovits Ágnes Enikő	11
Kisfaludi Bak Zsombor	10	Szerző Péter	10
Kiss Lóránd	10	Tófalvi Lehel	11

Tamási Áron Gimnázium – Székelyudvarhely

Barabás András	11	Lőrinczi Tünde	12
Biró Emese	10	Madár István	9
Biró Zsolt	10	Nagy Katalin	11
Dávid Tamás	11	Pál Levente	9
Gencsi Márta	9	Sándor Izabella	11
Horobeț Emil	12	Tamás Lehel	12
Ilyés Beatrix	9	Tankó István	11
Katona Hajna	10	Zsombori Attila	11
Keresztély Enikő	10		

Résztvevő tanárok névsora

Vass Csilla	Baróti Szabó Dávid Középiskola
Dávid Géza	Tamási Áron Gimnázium
Kovács Lajos	Tamási Áron Gimnázium
Kovács Béla	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn
Longáver Lajos	Németh László Líceum
Takács Attila	Leöwey Klára Líceum
Kulcsár Ilona	Orbán Balázs Gimnázium
Sebestyén József	Orbán Balázs Gimnázium
Bíró Judit	Székely Mikó Kollégium
Bíró Béla	Székely Mikó Kollégium
Csurulya Edit	Székely Mikó Kollégium
Gáspár Mária	Nagy Mózes Elméleti Líceum
Egyed Géza	Nagy Mózes Elméleti Líceum
Hatházi Annamária	Báthory István Elméleti Líceum
Jakab Aliz	Apáczai Csere János Líceum
Szilágyi Jutka	Báthory István Elméleti Líceum
Péter András	Csíky Gergely Líceum
Nemes András	Bartók Béla Líceum
Bíró Zoltán	Salamon Ernő Gimnázium
Szilágyi Ferenc	Salamon Ernő Gimnázium
Kacsó Ferenc	Bolyai Farkas Líceum
György Gabriella	Bolyai Farkas Líceum
Stan Ágota	Bolyai Farkas Líceum
Nagy Örs	Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Vandra Mária	Áprily Lajos Főgimnázium

Díjazottak

9. osztály		10. osztály	
Brudaşcă Renáta	*I. díj*	*Szerző Péter*	*I. díj*
Kovács Zoltán	*II. díj*	*Biró Emese*	*II. díj*
Bodor Zoltán	*III. díj*	*Nagy Tímea*	*II. díj*
Hevele István	*dicséret*	*Bajnóczi Tamás*	*III. díj*
Polcz Péter	*dicséret*	*Kisfaludi Bak Zsombor*	*dicséret*
Szőke Katalin	*dicséret*	*Illyés Ágota*	*dicséret*
Gencsi Márta	*dicséret*	*Simon Levente*	*dicséret*
Furdek Bálint	*dicséret*	*Kilyén Attila Örs*	*dicséret*
Sasu Róbert	*dicséret*	*Visky Mária*	*dicséret*
Buslig Szabolcs	*dicséret*	*Szász Zsigmond*	*dicséret*
Nemes Kinga	*dicséret*	*Biró Zsolt*	*dicséret*
Szabó Ágnes	*dicséret*	*Hodgyai Zoltán*	*dicséret*
Bedő Anita	*dicséret*	*Tárkányi Ildikó*	*dicséret*
Fülöp Annamária	*dicséret*	*Bakos Katinka*	*dicséret*
Hadnagy Kinga	*dicséret*	*Csutak Katalin*	*dicséret*
János Csongor	dicséret	*Maksay Dorottya*	*dicséret*
Pál Levente	dicséret	*Rangyák Eszter*	*dicséret*
Várady Emese	dicséret	Kovács Zsolt Péter	dicséret
Zajzon Barna	dicséret	Tóth Miklós	dicséret
Konnerth Raimund	dicséret	Burus Ákos	dicséret

11. osztály

Dobribán Edgár	*I. díj*
Bíró Csongor	*II. díj*
Fecske Nándor	*III. díj*
Bíró Lehel	*dicséret*
Ferencz Endre	*dicséret*
Kántor Lajos	*dicséret*
Kertész Lóránd Tamás	*dicséret*
Kis Alpár	*dicséret*
Tófalvi Lehel	*dicséret*
Sándor Izabella	*dicséret*
Kolcsár Árpád Zoltán	*dicséret*
Szenkovits Ágnes Enikő	*dicséret*
Zsombori Attila	*dicséret*
Terkál Róbert	*dicséret*
Szenkovits Annamária	*dicséret*
Kisfaludi Bak Zoltán	*dicséret*
Sándor Bulcsú	*dicséret*
Bán Orsolya	dicséret
Kalló Jankucz Anna	dicséret
Kovács Tünde	dicséret
Nagy Katalin	dicséret

12. osztály

Lőrincz András	*I. díj*
Nagy Aliz	*I. díj*
Györfi Tamás	*II. díj*
Guttmann Emese	*III. díj*
Máthé Koppány	*dicséret*
Mészáros Alpár	*dicséret*
Fekete Balázs	*dicséret*
Horobeț Emil	*dicséret*
Simon Vivien	*dicséret*
Sükösd Endre	*dicséret*
Tamás Lehel	*dicséret*
Dénes Péter	*dicséret*
Bartha Zalán	*dicséret*
Kész Borbála	*dicséret*
Bedő Zsolt-Zoltán	*dicséret*

Kiss Elemér díj: *Dobribán Edgár*, XI. osztály – a versenyen elért legmagasabb pontszámért
SimpleX díj: *Dobribán Edgár*, XI. osztály – eredeti megoldásaiért
Különdíjak: *Pál Levente, Ferencz-Hanke Réka*, IX.osztály és *Nagy Aliz,* XII. osztály.

A dőlt betűvel kiemelt versenyzők továbbjutottak a XVI. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyre
A kiosztott díjak értéke: I. díj – 400 lej, II. díj – 300 lej, III. díj – 200 lej, Kiss Elemér díj – 500 lej, Simplex díj – 500 lej,

A VERSENY TÁMOGATÓI

CSÍKSZEREDA POLGÁRMESTERI HIVATALA
APÁCZAI CSERE JÁNOS PEDAGÓGUSOK HÁZA
HARGITA MEGYEI TANFELGYELŐSÉG

ALZO VENDÉGLŐ
B&B TRANSINVEST KFT.
BAU-MIL KFT.
BENIGNITAS EGYESÜLET
COMPUTER TRADE KFT.
CORVINA KÖNYVESHÁZ
CSILLAG KFT.
FOLEMCOM SOMLYÓ
GERCON KFT.
HARBAU KFT.
HARGITA GYÖNGYE RT.
HARMAT ALAPÍTVÁNY
HARMOPAN RT
HERA CON-STRUCT
I.F.P.T.R. ALAPÍTVÁNY
IRIS SERVICE SRL
KONTUR KFT.
KONZOL KFT. M-CIUC
KRAITEN RT.
LEMECO RT.
MADEZIT KFT.
MI&KO KFT.
NET-COMP KFT.
PROMPT KFT.
PRO-PRINT KIADÓ
SIMPLEX EGYESÜLET
SKY DISTRIBUTION KFT.
STATUS KIADÓ
SYRINX KFT.
TIPOGRAPHIC NYOMDA
TOPO SERVICE RT.
Z&Z PIRO KFT.

MAGÁNSZEMÉLYEK

DÁVID ZOLTÁN
PORÁCZKY CSABA
IMETS LÁSZLÓ
BAKA KATALIN
EGYED JÁNOS
IFJ. INCZE ZOLTÁN
FODOR MÁRTA
SÓGOR CSABA

A kiadvány megjelenését a TIPOGRAPHIC kft. és a KONTUR kft. támogatta