Függvények

Függvények alkotóelemei: 1) Értelmezési tartomány (A)

$f: A \to B$ 2) Értéktartomány (B)

3) Leképezési törvény (megfeleltetési szabály)
- halmazokkal (grafikusan)
- értéktáblázattal
- függvényértékek felsorolásával
- képlettel

Egy $f: A \to B$ leképezés(megfeleltetés) csak akkor függvény, ha:
- minden elemet felhasznál az A-ból
- egy elemhez az A-ból csak egy elemet rendel a B-ből

Számfüggvények:

Olyan $f: A \to B$ függvények melyekben A és B számhalmazok ($N; Z; Q; R$ vagy ezek részhalmazai)

Számfüggvény **gyök**ei: analitikusan: $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai az A-ban

grafikusan az *f* függvény ***grafikus kép***ének ***metszéspontjai az OX tengellyel***

Számfüggvény **előjel**e:

pozitív analitikusan: azon x-ek az A-ból melyekre teljesül, hogy $f(x) > 0$

grafikusan azon x-ek az A-ból melyekre az *f* függvény ***grafikus kép***e ***az OX tengely fölött*** helyezkedik el

negatív analitikusan: azon x-ek az A-ból melyekre teljesül, hogy $f(x) < 0$

grafikusan azon x-ek az A-ból melyekre az *f* függvény ***grafikus kép***e ***az OX tengely alatt*** helyezkedik el

Számfüggvény **képhalmaz**a:

Im f analitikusan: olyan y-ok a B-ből melyekre létezik x az A-ból úgy, hogy $f(x) = y$

képlettel: $\operatorname{Im} f = \{ y \in B / \exists x \in A \,;\, f(x) = y \}$

másképp: a B-ből felhasznált y-ok halmaza

grafikusan az *f* függvény ***grafikus kép***ének ***vetülete az OY tengelyre***

Számfüggvény **értelmezési tartomány**a(doméniuma):

$D_f = A$ analitikusan: az A-halmaz

grafikusan az *f* függvény ***grafikus kép***ének ***vetülete az OX tengelyre***

Számfüggvény **inverze**:

ha ***f*** **bijektív** analitikusan: $f: A \to B \quad f(x) = y$ inverze $f^{-1}: B \to A \quad f^{-1}(y) = x$

akkor létezik ***f^{-1}*** eljárás: megoldjuk $f(x) = y$ egyenletet x-re nézve így megkapjuk az $f^{-1}(y)$ függvényt, melyeben y-t helyettesítjük x-el.

grafikusan az *f* függvény ***grafikus kép***ének ***szimmetrikusa az első szögfelezőre***

Számfüggvény **monotonitása**:

f **növekvő** analitikusan: ha kissebb x-hez kissebb függvényérték, nagyobb x-hez nagyobb, vagy egyenlő függvényérték tartozik

képlettel: ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

vagy $\forall x_1; x_2 \in A;$ $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \ge 0$

grafikusan ***az f függvény grafikus képén balról-jobbra haladva felfelé "mászunk",vagy ugyanabban a magasságban maradunk***

f **csökkenő** analitikusan: ha kissebb x-hez nagyobb függvényérték, nagyobb x-hez kissebb, vagy egyenlő függvényérték tartozik

képlettel: ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

vagy $\forall x_1; x_2 \in A;$ $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \le 0$

grafikusan ***az f függvény grafikus képén balról-jobbra haladva lefelé "csúszunk",vagy ugyanabban a magasságban maradunk***

f **szigorúan növekvő**	analitikusan:	ha kissebb x-hez kissebb függvényérték, nagyobb x-hez nagyobb függvényérték tartozik
	képlettel:	ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
		vagy $\forall x_1; x_2 \in A;$ $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$
	grafikusan	***az f függvény grafikus képén balról-jobbra haladva felfelé "mászunk".***
f **szigorúan csökkenő**	analitikusan:	ha kissebb x-hez nagyobb függvényérték, nagyobb x-hez kissebb függvényérték tartozik
	képlettel:	ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
		vagy $\forall x_1; x_2 \in A;$ $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$
	grafikusan	***az f függvény grafikus képén balról-jobbra haladva lefelé "csúszunk".***

Számfüggvény **injektivitása**:

f **injektív**	analitikusan:	ha különböző x-ekhez A-ból különböző függvényértékek tartoznak
	képlettel:	ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
		vagy $\forall x_1; x_2 \in A;$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
	grafikusan	***bármilyen vízszintes egyenest húzva az f függvény grafikus képét <u>legtöbb</u> egy pontban metszi***

Számfüggvény **szürjektivitása**:

f **szürjektív**	analitikusan:	ha bármilyen B-beli elemnek van ősképe az A-ban
	képlettel:	ha $\forall y \in B;$ $\exists x \in A;$ $f(x) = y$
		vagy $\operatorname{Im} f = B$
	grafikusan	***bármilyen vízszintes egyenest húzva a OY tengelyen felvett B halmazon keresztül az f függvény grafikus képét <u>legalább</u> egy pontban metszi***

Számfüggvény **bijektivitása**:

f **bijektív**	analitikusan:	***ha injektív és szürjektív*** **!csak ekkor van inverz függvény!**
		ha bármilyen B-beli elemnek *egy és cask egy* ősképe van az A-ban
	képlettel:	ha $\forall y \in B;$ $\exists! x \in A;$ $f(x) = y$
	grafikusan	***bármilyen vízszintes egyenest húzva a OY tengelyen felvett B halmazon keresztül az f függvény grafikus képét <u>pontosan</u> egy pontban metszi***

Számfüggvény **konvexitása**:

f **konvex (Jensen)**	képlettel:	ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$
	grafikusan	***ha az f függvény grafikus képének bármely két pontját összekötő szakasz a grafikus kép felett helyezkedik el***
f **konkáv**	képlettel:	ha $\forall x_1; x_2 \in A;$ ha $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$
	grafikusan	***ha az f függvény grafikus képének bármely két pontját összekötő szakasz a grafikus kép alatt helyezkedik el***

Számfüggvény **páritása**:

f **páros**	képlettel:	ha $\forall x \in A;$ $f(-x) = f(x)$
	grafikusan	***ha az f függvény grafikus képe szimmetrikus az OY tengelyre***
f **páratlan**	képlettel:	ha $\forall x \in A;$ $f(-x) = -f(x)$
	grafikusan	***ha az f függvény grafikus képe szimmetrikus az Origóra***

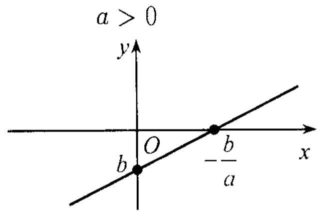
Ismert számfüggvények: .

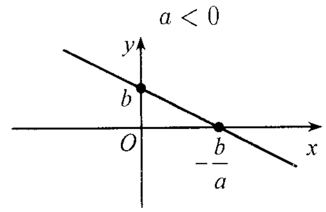
Elsőfokú függvény: $f: R \to R \quad f(x) = ax + b$**;** $a \in R^*$ **Gyöke :** $x = \frac{-b}{a}$

Grafikus képe: egyenes (vagy annak bizonyos részei, ha $A \subset \mathbb{R}$)

Monotonitása: ha $a > 0$ akkor $\boldsymbol{f}$ növekvő

ha $a < 0$ akkor $\boldsymbol{f}$ csökkenő





x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

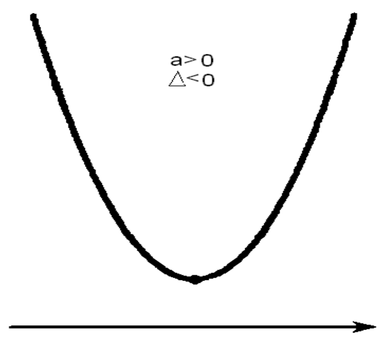
Másodfokú függvény: $f: R \to R \;\; f(x) = ax^2 + bx + c$**;** $a \in R^*$ **Gyökei:** $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$**,** ha $\Delta \geq 0$

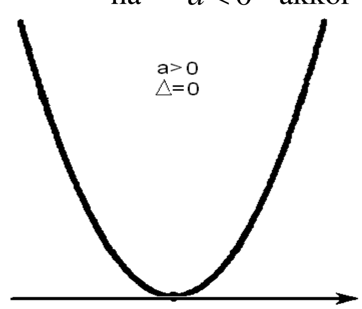
Grafikus képe: parabola (vagy annak bizonyos részei, ha $A \subset R$)

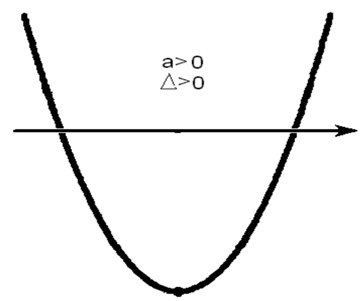
Csúcsa: $V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ **vagyis** $V(x_V; y_V); x_V = \frac{-b}{2a}; y_V = \frac{-\Delta}{4a} = f(x_V)$

Konvexitása: ha $a > 0$ akkor $\boldsymbol{f}$ konvex

ha $a < 0$ akkor $\boldsymbol{f}$ konkáv



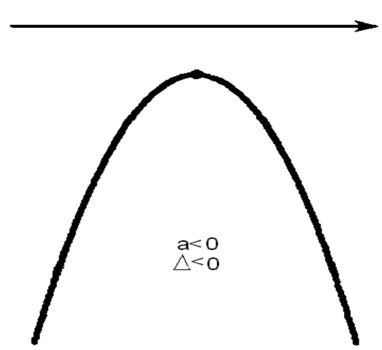


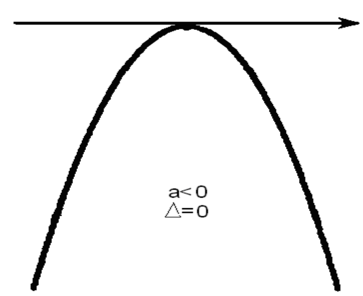


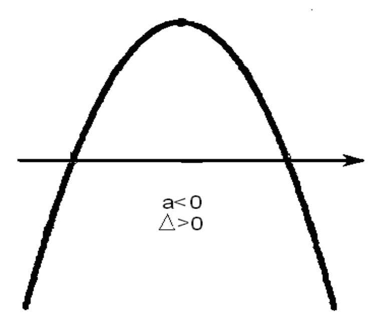
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+ + + + + + + +	

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$f(x)$		+ + +	0	+ + +	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+ +	0	− − −	0	+ +	







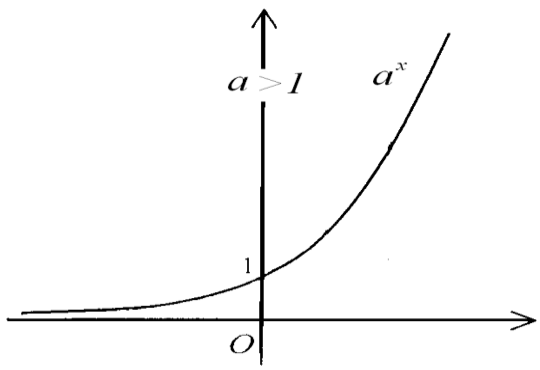
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	− − − − − − − −	

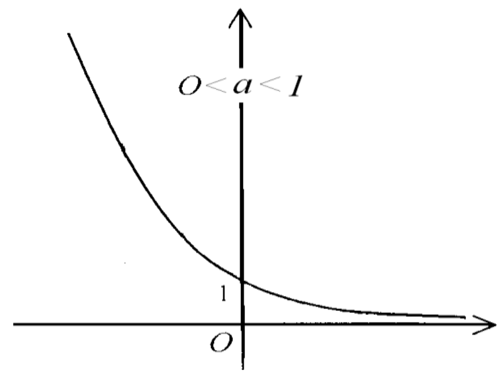
x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$f(x)$		− − −	0	− − −	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		− −	0	+ + +	0	− −	

Exponenciális függvény: $f: R \to (0;+\infty)$ $f(x) = a^x$; $a > 0; a \neq 1$ **Gyöke : nincs**

Aszimptotája: az OX tengely



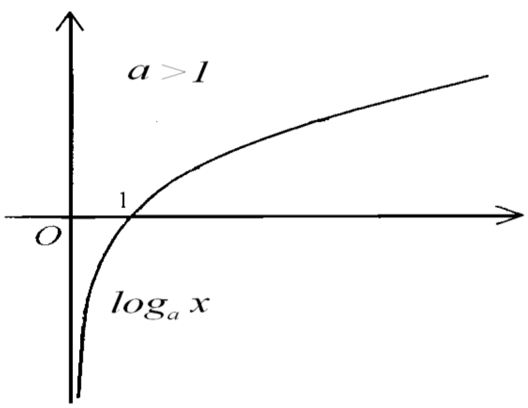


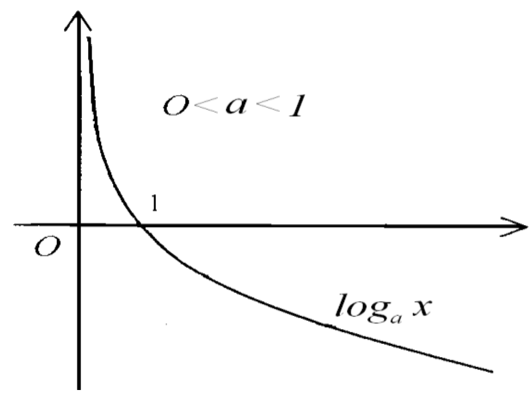
- szigorúan növekvő
- $a^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
- $a^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$
- konvex

- szigorúan csökkenő
- $a^x > 1 \Leftrightarrow x < 0$
- $a^x < 1 \Leftrightarrow x > 0$
- konvex

Logaritmus függvény: $f: (0;+\infty) \to R$ $f(x) = \log_a x$; $a > 0; a \neq 1$

Aszimptotája: az OY tengely

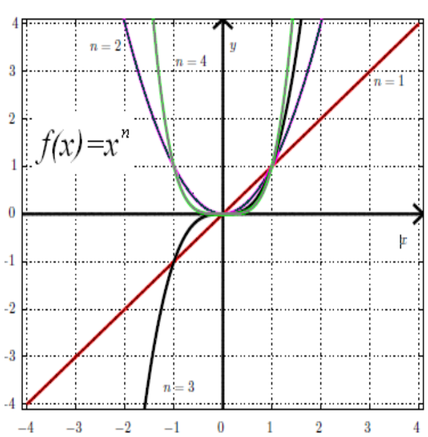




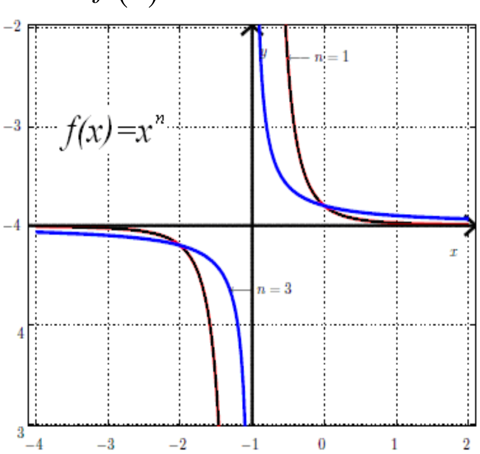
- szigorúan növekvő
- $\log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\log_a x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
- konkáv

- szigorúan csökkenő
- $\log_a x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
- $\log_a x < 0 \Leftrightarrow x > 1$
- konvex

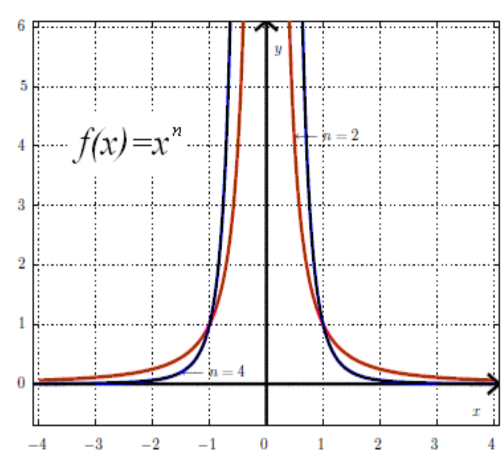
Hatványfüggvény: $f: R \to R$ $f(x) = x^n$



Hatványfüggvények képe pozitív egész kitevő esetén



Hatványfüggvények képe negatív egész, páratlan kitevő esetén



Hatványfüggvények képe negatív egész, páros kitevő esetén

Trigonometriai függvények:

sin $f:R\to[-1;1]$ $f(x)=\sin x$ **Periódus:** $T=2\pi$

ha $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1;1]$ $f(x)=\sin x$ **ekkor bijektív,**

inverze: $f:[-1;1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$**;** $f(x)=\arcsin x$

cos $f:R\to[-1;1]$ $f(x)=\cos x$ **Periódus:** $T=2\pi$

ha $f:[0;\pi]\to[-1;1]$ $f(x)=\cos x$ **ekkor bijektív,**

inverze: $f:[-1;1]\to[0;\pi]$**;** $f(x)=\arccos x$

tg $f:R\backslash\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}\to R$ $f(x)=\operatorname{tg} x$ **Periódus:** $T=\pi$

ha $f:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to R$ $f(x)=\operatorname{tg} x$ **ekkor bijektív,**

inverze: $f:R\to\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$**;** $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$

ctg $f:R\backslash\{k\pi\}\to R$ $f(x)=\operatorname{ctg} x$ **Periódus:** $T=\pi$

ha $f:(0;\pi)\to R$ $f(x)=\operatorname{ctg} x$ **ekkor bijektív,**

inverze: $f:R\to(0;\pi)$**;** $f(x)=\operatorname{arc\,ctg} x$

Trigonometriai függvények grafikus képei: