Polinomok – rövid összefoglaló

Ért. Az $f=(a_0;a_1;a_2;...)$ sorozatot komplex együtthatójú polinomnak nevezzük,
ha $a_0;a_1;a_2;...\in C$ és $\exists k\in N$ úgy, hogy $\forall n\geq k; n\in N$ esetén $a_n=0$.

Ezen értelmezés alapján $a=(a;0;0;0;...)\in R$ szám

$X=(0;1;0;0;0;...)$ polinom – elnevezése: ***határozatlan***

Hasonlóan értelmezzük: $X^2=(0;0;1;0;0;...)$; $X^3=(0;0;0;1;0;...)$;…; $X^n=(\underbrace{0;...;0}_{n\ darab};1;0;0;...)$

Tétel. Bármely $f=(a_0;a_1;a_2;...a_n;0;0;...)$ komplex együtthatójú polinom felírható
$f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$ alakban, mely az illető ***polinom algebrai alakja***.

Ért. Az $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n\in C[X]$ polinom ***helyettesítési értéke*** egy $\alpha\in C$ számban:
$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+...+a_n\alpha^n$.

Ért. Az $\alpha\in C$ szám ***gyöke*** az $f\in C[X]$ polinomnak, ha $f(\alpha)=0$:

Tétel. Egy $f\in C[X]$ polinom $(x-\alpha)$ polinommal való ***osztási maradéka***: $r=f(\alpha)$.

Bézeut-Tétel. Egy $f\in C[X]$ polinom akkor és csak akkor ***osztható*** az $(x-\alpha)$ polinommal, ha $f(\alpha)=0$.

Tétel. Ha az $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n\in C[X]$ polinom, gr$f=n$, gyökei $\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n\in C$ számok, akkor
f a következő alakban ***bontható szorzattá***: $f=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.

Jelölések-tudnivalók:

$f\in C[X]$ - *f* komplex együtthatójú polinom

$f\in R[X]$ - *f* valós együtthatójú polinom

- ha $a+ib$ gyöke $f\in R[X]$-nek, akkor $a-ib$ is gyöke
- minden $f\in R[X]$ polinom ***felbontható legfeljebb másodfokú valós együtthatójú polinomok szorzatára***

$f\in Q[X]$ - *f* racionális együtthatójú polinom

- ha $a+\sqrt{b}$ gyöke $f\in Q[X]$-nek, akkor $a-\sqrt{b}$ is gyöke

$f\in Z[X]$- *f* egész együtthatójú polinom

- $f\in Z[X]$ **egész gyökei** a { $\pm$ szabad tag osztói} halmazban kereshető
- $f\in Z[X]$ **racionális gyökei** a $\left\{\pm\frac{\text{szabad tag osztoi}}{\text{dominans egyutthato osztoi}}\right\}$ halmazban kereshető

Maradékos osztás tétele. Bármely $f,g\in K[X]$, $g\neq 0$ polinomok esetén egyértelműen léteznek a $q\in K[X]$ és $r\in K[X]$ polinomok úgy, hogy $f=g\cdot q+r$ és gr$r<$gr$g$,
ahol $(K;+;\cdot)$ kommutatív test. (Azaz $K[X]$ lehet $C[X]$, $R[X]$ vagy $Z_p[X]$)

Megjegyzések:

1) Ha egy $f\in R[X]$ polinomnak egy $g=ax^2+bx+c\in R[X]$ polinommal való osztási maradékát kell meghatározni, akkor felírjuk a maradékos osztás tételét felhasználva, hogy a maradék polinom legfeljebb elsőfokú lehet, azaz $r=mx+n$. Így a következő összefüggéshez jutunk: $f(x)=g(x)\cdot q(x)+mx+n$, ahová behelyettesítve a g x_i gyökeit *m*-ben és *n*-ben egy egyenletrendszerhez jutunk, mivel ekkor $g(x_i)=0$ és $f(x_i)$-t ki lehet számítani.

2) Egy polinom együtthatóinak összege: $f(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n$.

3) Egyes feladatoknál használható még az $f(-1)=a_0-a_1+a_2+...+(-1)^n a_n$

4) Ha egy polinomról igazolni kell, hogy nem minden gyöke valós, akkor általában azt kell igazolni, hogy $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=S_1^2-2S_2<0$.

5) Ha $f\in Z[X]$ esetén a domináns együttható ***1***, akkor a racionális gyökök csak az egész gyökök.

6) Ha $f\in Z[X]$ esetén a szabad tag ***1***, akkor az egész gyökök csak ± 1 lehetnek.

Viéte féle képletek

$f = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \Rightarrow$ kifejezhető x_1^2 $\qquad s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad p = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \Rightarrow$ kifejezhető x_2^2 $\qquad x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p \qquad x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 2sp$

$f = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} \quad S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \quad S_3 = x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}$

Felhasználjuk, hogy $\begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0 \\ \underline{ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d = 0} \end{cases}$

$$a\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) + b\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + c\left(x_1 + x_2 + x_3\right) + 3d = 0$$

ahonnan kifejezhető $\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)$, mivel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$.

Polinom többszörös gyökei

A következőkben *K* alatt egy $(K;+;\cdot)$ kommutatív testet értünk.(Azaz $K[X]$ lehet $C[X]$, $R[X]$ vagy $Z_p[X]$)

Ért. Az $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in K[X]$ polinom ***formális deriváltja***: $Df = a_1 + 2a_2X + ... + na_nX^{n-1}$.

Ért. Az $\alpha \in K$ szám ***k-szoros gyöke*** az $f \in K[X]$ polinomnak, ha $f = (x-\alpha)^k \cdot q$, $q \in K[X]$, $q(\alpha) \neq 0$.

Tétel Ha $\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n \in K$ $k_1; k_2; ...; k_n$-szeres gyökei az $f \in K[X]$ polinomnak,
akkor $f = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-\alpha_n)^{k_n} \cdot q$, $q \in K[X]$, $q(\alpha) \neq 0$;
ha még teljesül, hogy $\text{gr}\, f = n$ és $k_1 + k_2 + ... + k_n = n$, akkor $f = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-\alpha_n)^{k_n}$.

Tétel Ha $\alpha \in K$ ***k-szoros gyöke*** az $f \in K[X]$ polinomnak, akkor $(k-1)$ szeres gyöke Df -nek.
Azaz: ha $\alpha \in K$ ***k-szoros gyöke*** az $f \in K[X]$ polinomnak,
akkor gyöke a Df -nek, . $D^{(2)}f$ -nek, $D^{(3)}f$ -nek, …, $D^{(k-1)}f$ -nek, ***de nem gyöke*** $D^{(k)}f$ -nek.

Polinom felbonthatósága

Ért. Az $f \in K[X]$, $\text{gr}\, f \geq 1$ polinom ***reducibilis*** *K* felett, ha léteznek olyan $p, q \in K[X]$ polinomok, amelyekre $f = p \cdot q$, $\text{gr}\, p \geq 1$, $\text{gr}\, q \geq 1$. ***Ellenkező esetben*** f polinom ***irreducibilis***.

Tételek:

1. Minden elsőfokú $f \in K[X]$ polinom irreducibilis *K* felett.
2. Minden elsőfokú $f \in R[X]$ polinom irreducibilis R felett.
   A másodfokú $f \in R[X]$ polinom irreducibilis R felett, ha nincs valós gyöke,
   mert ha $x_1; x_2 \in R$ gyökök, akkor $f = a(x-x_1)(x-x_2)$.
   Minden másodfokúnál nagyobb fokszámú $f \in R[X]$ polinom reducibilis R felett.
3. Minden elsőfokú $f \in C[X]$ polinom irreducibilis C felett.
   Minden elsőfokúnál nagyobb fokszámú $f \in C[X]$ polinom reducibilis C felett.
4. Ha $f \in K[X]$ és $\text{gr}\, f = 2$ vagy $\text{gr}\, f = 3$, és *f*-nek nincs gyöke *K*-ban, akkor *f* irreducibilis *K* felett.
   Ha $f \in K[X]$ reducibilis *K* felett és $\text{gr}\, f = 2$ vagy $\text{gr}\, f = 3$, akkor *f*-nek van gyöke *K*-ban.

Megjegyzés: $f \in Z_p[X]$ estén a 4. tételt használjuk (*p*-prímszám).