Trigonometriai képletek

Alapösszefüggések:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\mathrm{ctg}x} \qquad \mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\mathrm{tg}x} \qquad \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1$$

Periódusra vonatkozóképletek: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$

$x \in R,\ k \in Z$ $\qquad \mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}x$ $\qquad \mathrm{ctg}(x + k\pi) = \mathrm{ctg}x$

Előjelre vonatkozó képletek: ***sin* ; *tg* és *ctg* páratlan** $\qquad$ ***cos* páros**

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x \qquad \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\mathrm{arc\,tg}(-x) = -\mathrm{arc\,tg}x \qquad \mathrm{arc\,ctg}(-x) = \pi - \mathrm{arc\,ctg}x$$

Addiciós képletek:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \qquad \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \qquad \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\mathrm{tg}(x + y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y} \qquad \mathrm{tg}(x - y) = \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}$$

Dupla szögek:

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\mathrm{tg}(2x) = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

Tripla szögek:

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos(3x) = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

Feles képletek:

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \qquad \cos x = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \pm\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \qquad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

t-s képletek $t = tg\dfrac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \mathrm{tg}x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \mathrm{ctg}x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$$

Összegből szorzat:

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2}$$

$$\mathrm{tg}x \pm \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y} \qquad \sin x - \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x - y}{2} \cdot \cos\frac{x + y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x + y}{2} \cdot \sin\frac{x - y}{2}$$

Inverz trigonometriai függvények:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \mathrm{arctg}x + \mathrm{arc\,ctg}x = \frac{\pi}{2}$$

<u>Ha</u> $x \in [-1;1]$ $\qquad \sin(\arcsin x) = x \qquad \cos(\arccos x) = x$ $\qquad$ <u>Ha</u> $x \in R$ $\qquad \mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}x) = x \qquad \mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}x) = x$

<u>Ha</u> $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \arcsin(\sin x) = x \qquad \arccos(\cos x) = x$ $\qquad$ <u>Ha</u> $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \mathrm{arc\,tg}(\mathrm{tg}x) = x \qquad \mathrm{arc\,ctg}(\mathrm{ctg}x) = x$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2} \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,ctg}x) = \frac{1}{\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}x)} = \frac{1}{x} \qquad \mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,tg}x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}x)} = \frac{1}{x}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \qquad \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\mathrm{arc\,tg}(\mathrm{ctg}x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,ctg}(\mathrm{ctg}x) = \frac{\pi}{2} - x \qquad \mathrm{arc\,ctg}(\mathrm{tg}x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tg}(\mathrm{tg}x) = \frac{\pi}{2} - x$$

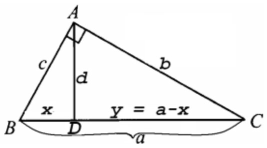
Szorzatból összeg:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}.$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}.$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

Metrikus összefüggések derékszögű háromszögben



Befogó-tétel: $c^2 = x \cdot a$

$c^2 = y \cdot a$

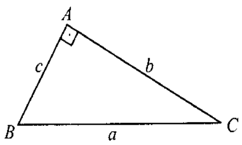
Magasság-tétel: $d^2 = x \cdot y$

Magasság hossza: $d = \dfrac{b \cdot c}{a}$

Pitagorasz-tétel: $a^2 = b^2 + c^2$

Terület-képletek: $T = \dfrac{b \cdot c}{2} = \dfrac{a \cdot d}{2}$

Szögfüggvények a derékszögű háromszögben



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}; \quad \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}; \quad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}; \quad \operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Ha $0 < x < 90°$, akkor $0 < \sin x < 1$ és $0 < \cos x < 1$

$\operatorname{tg} x \in (0, +\infty)$ és $\operatorname{ctg} x \in (0, +\infty)$ $\quad (0 < x < 90°)$

$\sin x = \cos(90° - x)$ és $\cos x = \sin(90° - x)$ $\quad (0 < x < 90°)$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(90° - x)$ és $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$ $\quad (0 < x < 90°)$

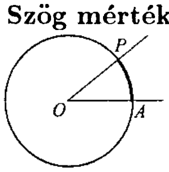
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (0 < x < 90°)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \text{ és } \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad (0 < x < 90°)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ és } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (0 < x < 90°)$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ és } \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Szög mértéke radiánban



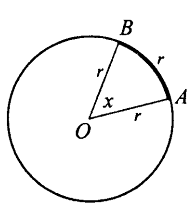
A középponti szög fokokban kifejezett mértéke megegyezik a szárai közé eső körív mértékével.

$$\mathrm{m}(\widehat{AOP}) = \mathrm{m}(\widehat{AP}).$$

Értelmezés

Egy radián a mértéke annak a középponti szögnek, amelyhez a kör sugarával egyenlő hosszúságú körív tartozik.

$$\boxed{x = 1 \text{ rad} \iff l_{\widehat{AB}} = r,}$$



$\dfrac{K}{r} = 2\pi$ $(\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q},\ \pi \approx 3,1415) \Rightarrow K = 2\pi r$

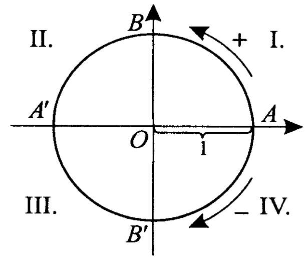
Fok-radián átalakítások

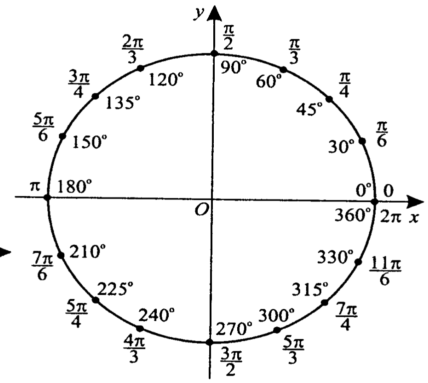
180° .... π rad

α x

$$x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}, \quad \alpha = \frac{x \cdot 180°}{\pi}$$

A trigonometriai kör





A 30°, 45° és 60° szögfüggvényértékei

x	30°	45°	60°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Metrikus összefüggések általános háromszögben

Szinusz tétel: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Koszinusz tétel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$

Szögek kiszámítása:

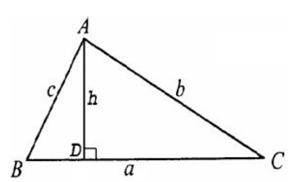
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{és} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Egy háromszögben, ha: $\cos\alpha > 0$ akkor $m(\alpha) < 90^0$

$\cos\alpha = 0$ akkor $m(\alpha) = 90^0$

$\cos\alpha < 0$ akkor $m(\alpha) > 90^0$

Terület-képletek:



$$T = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

Legyen r - a háromszögbe írt kör sugara

R - a háromszög köré írt kör sugara

$T = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ (*Heron* képlet)

$T = p \cdot r = \dfrac{abc}{4R}$ ahol $p = \dfrac{a+b+c}{2}$