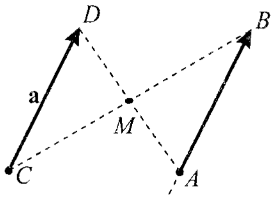
Nem koordinátás vektorok

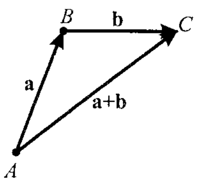


Ért. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok **ekvipolensek**, ha az $[AD]$ és $[CB]$ szakaszok felezőpontjai egybeesnek.

Azaz: Két vektor ekvipolens, ha ugyanaz az irányuk, irányításuk és nagyságuk.

Jel: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

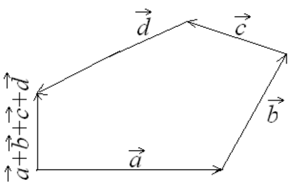
Tulajdonság: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ paralelogramma



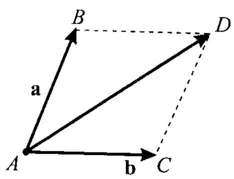
Műveletek vektorokkal

Összeadás

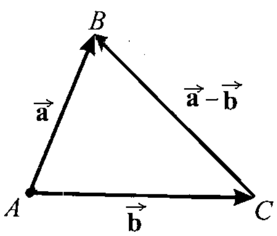
háromszögszabály
- a második vektor kezdőpontját az első vektor végpontjába kell helyezni
- az összegvektor az első kezdőpontjából a második végpontjába mutat



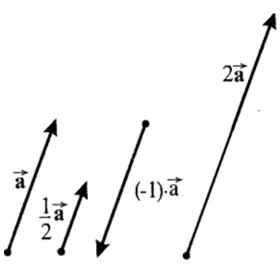
vektorsokszög-szabály
- a következő vektor kezdőpontját az előző vektor végpontjába kell helyezni
- az összegvektor az első kezdőpontjából az utolsó végpontjába mutat



paralelogramma-szabály
- közös kezdőpontba helyezzük a vektorokat, majd paralelogrammát szerkesztünk, melynek oldalai az előbbi vektorok
- az összegvektor a közös kezdőpontból kiinduló átló lesz, mint vektor



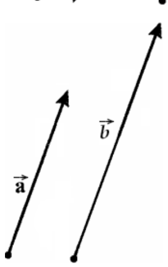
Különbség - közös kezdőpontba helyezzük a vektorokat
- a különbség-vektor a végpontokat összekötő olyan vektor lesz, mely a kisebbítendő(első) vektor felé mutat



Vektor szorzása számmal (skalárral): -nyújtás(zsugorítás) és esetleg irányításváltás

$k \cdot \vec{a}$ - ha $k > 0$ a vektor iránya nem változik, csak a modulusza $|k \cdot \vec{a}| = k \cdot |\vec{a}|$

- ha $k < 0$ a vektor iránya és a modulusza is változik $|k \cdot \vec{a}| = -k \cdot |\vec{a}|$



Vektorok párhuzamossága = vektorok kollinearitása

$\vec{a} \,|\,|\, \vec{b}$ - ha egy egyenesen vannak, vagy tartóegyeneseik párhuzamosak

- matematikailag: $\vec{a} \,|\,|\, \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in R^*; \quad \vec{a} = k \cdot \vec{b}$

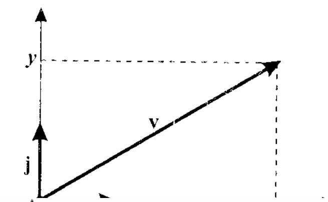
A;B;C pontok kollinearitása

- ha egy egyenesen vannak
- matematikailag: ha $\overrightarrow{AB} \,|\,|\, \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists k \in R^*; \quad \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

vagy ha $\overrightarrow{BC} \,|\,|\, \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists k \in R^*; \quad \overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

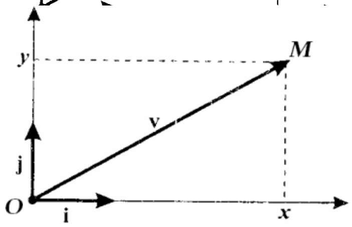
vagy ha $\overrightarrow{AB} \,|\,|\, \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \exists k \in R^*; \quad \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$

Koordinátás vektorok



$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vagy rövidebben írva $\vec{v} = (x; y)$

Vektor modulusza = nagysága: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Pont helyzetvektora

$M(x; y)$ síkbeli pont helyzetvektora az $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x; y)$ vektor, ahol O az *Origó*.

Pont helyzetvektora formailag megyezik végpontjának koordinátáival.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x; y) \quad \Leftrightarrow \quad M(x; y)$$

Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

$\vec{u}(a;b) \quad \vec{v}(c;d) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (a;b) + (c;d) = (a+c; b+d) \quad \vec{u} - \vec{v} = (a;b) - (c;d) = (a-c; b-d)$

$k \cdot \vec{u} = k \cdot (a;b) = (k \cdot a; k \cdot b)$**,** $k \in R$

Vektor modulusza $\quad \vec{u} = (a;b) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Skaláris szorzat $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (a;b) \cdot (c;d) = a \cdot c + b \cdot d = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$**,** ahol α a két vektor szöge

Kétvektor szöge: közös kezdőpontba kell helyezni a vektorokat, és a közrezárt szögük pedig α

ekkor: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{a \cdot c + b \cdot d}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$

Párhuzamosság $\quad \vec{u} \,|\,|\, \vec{v} = (a;b) \,|\,|\, (c;d) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \quad (=k)$

ugyanis: $\quad \vec{u} \,|\,|\, \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in R^*; \quad \vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow (a;b) = k \cdot (c;d) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \cdot c \\ b = k \cdot d \end{cases}$

Merőlegesség $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a \cdot c + b \cdot d = 0$

ugyanis: $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \alpha = 90^0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \quad a \cdot c + b \cdot d = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = 0$

Vektor felírása végpontjaival **(végpont – kezdőpont)**

$$A(x_A; y_A); B(x_B; y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B; y_B) - (x_A; y_A) = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Háromszög területe $\quad T_{ABC_\Delta} = \left| \dfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|$

Pontok kollinearitása

$A(x_A; y_A); B(x_B; y_B); C(x_C; y_C)$ kollineárisak, ha $\overrightarrow{AB} \,|\,|\, \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_A; y_B - y_A) \square (x_C - x_B; y_C - y_B) \Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

$$T_{ABC_\Delta} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Szakasz felezőpontja az $[AB]$ G felezőpontja esetén: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

M külső pont esetén: $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$

M helyett O-t (origó) írva: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

$A\left(x_A;y_A\right);B\left(x_B;y_B\right);$ $\Rightarrow$ $x_G=\frac{x_A+x_B}{2};y_G=\frac{y_A+y_B}{2}$

Háromszög súlypontja az ABC_Δ G súlypontja esetén: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

M külső pont esetén: $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

M helyett O-t (origó) írva: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

$A\left(x_A;y_A\right);B\left(x_B;y_B\right);C\left(x_C;y_C\right)$ $\Rightarrow$ $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$

Egyenesek egyenletei

$\vec{u}(a;b)$ **irányvektor** $\Leftrightarrow$ olyan vektor, amelyik párhuzamos az egyenessel

$\vec{n}(c;d)$ **normálvektor** $\Leftrightarrow$ olyan vektor, amelyik merőleges az egyenesre $\Rightarrow \vec{u}(a;b)\perp\vec{n}(c;d)$

m az egyenes iránytényezője,

α az egyenes OX tengely pozitív irányával bezárt trigonometriai irányban mért szöge

Ha $\vec{u}(a;b)$ irányvektor, $\Rightarrow$ $m=tg\alpha=\frac{b}{a}$

Ha $\vec{n}(a;b)$ normálvektor $\Rightarrow$ $\vec{u}(-b;a)$ irányvektor

Adott $A\left(x_A;y_A\right)$ **ponton átmenő egyenes** $\vec{u}(a;b)$ **irányvektoros egyenlete:** $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}$

Adott $A\left(x_A;y_A\right)$ **ponton átmenő egyenes iránytényezős egyenlete:** $y-y_A=m\left(x-x_A\right)$

Két adott $A\left(x_A;y_A\right)$ **és** $B\left(x_B;y_B\right)$ **pontokon átmenő egyenes egyenlete:** $y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\left(x-x_A\right)$

Mivel ekkor $\vec{u}$ irányvektornak az $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$ vektort vesszük, ezért $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Determinánsos alak: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0$

Az egyenes általános egyenlete: $ax+by+c=0$

Az egyenes iránytényezős egyenlete: $y=mx+n$

$d_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ és $d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ egyenesek.

Két egyenes **párhuzamos** $d_1\,||\,d_2$ ha: $m_1=m_2$ és $n_1\neq n_2$ **Ekkor** $\vec{u_1}\,||\,\vec{u_2}$

Két egyenes **egybeesik** $d_1=d_2$ ha: $m_1=m_2$ és $n_1=n_2$ **Ekkor** $\vec{u_1}\,||\,\vec{u_2}$

Két egyenes **párhuzamos** ha: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ Két egyenes **egybeesik** ha: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

Két egyenes merőleges, $d_1\perp d_2$ ha: $m_1\cdot m_2=-1$ azaz ha $\vec{u_1}\perp\vec{u_2}$

ha: $a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2=0$

Pont távolsága egyenestől: adottak d: $ax+by+c=0$ egyenes és $A\left(x_A;y_A\right)$ pont. $d\left(A;d\right)=\frac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$